TEMA V: PROBABILIDADE CONDICIONADA

Def.- Sexan A e B $\in$ Q tal que P(B)>0, daquela defíne-se a probabilidade de A condicionada a B como **$P(A/B)=P(A\cap B)/P(B)$** $\Rightarrow$ $P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)$

A probabilidade condicionada é unha probabilidade e polo tanto compre os tres axiomas

[1] $P(A)\geq 0$

[2] $P(\Omega)=1$ $\qquad \Omega=\cup A_i \qquad A_i$ suceso elem.

[3] $A_i\cap A_j=\emptyset \ \forall i\neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Advírta-se que:

$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$

Nota:

$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$

Exemplos:

•*De 80 alunos, aprobaron 50 e 35 eran rapaces. Cal é a probabilidade de aprobar cando se é rapaza?*

A pergunta que nos fan é P(A/R)

$P(A/R)=P(A\cap R)/P(R)=(35/80)/(45/80)=0.777...$

•*Fíxo-se unha enquisa para determinar o número de leitores dos xornais 1 e 2. Os resultados foron que o 32% le o X1, o 14% le o X2 e o 2.3% le ambos.*

a) Se se selecciona ao azar un leitor do X2, cal é a probabilidade de que lea o X1?

b) Se se selecciona ao azar un leitor do X1, cal é a probabilidade de que non lea o X2?

a)

$P(X1)=0.32$

$P(X2)=0.14$

$P(X1\cap X2)=0.023$

$P(X1/X2)=P(X1\cap X2)/P(X2)=0.023/0.14=0.1642857$

b)

$P(\overline{X2}/X1)=1-P(X2/X1)=1-[P(X2\cap X1)/P(X1)]=1-(0.023/0.32)=0.928125$

•*Para ingresar nun curso realíza-se unha proba previa. Sábe-se que o 28% dos candidatos non remataria o curso e que un 70% dos que o remataria supera a proba inicial. A porcentaxe de candidatos que supera a proba inicial é do 60%. Determinar a probabilidade de que unha persoa que supera a proba inicial remate o curso.*

$P(\overline{R})=0.28 \Rightarrow P(R)=0.72$

$P(S/R)=0.7$

$P(S)=0.6$

$P(R/S)=P(R\cap S)/P(S)=P(S/R)P(R)/P(S)=(0.7\cdot 0.72)/0.6=0.84$

▪ **Teorema do Produto** *ou regra da multiplicación*

Sexa $\{A_1,A_2,...,A_n\} \in Q$ tal que $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)>0$ entón

$$\mathbf{P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2\cap A_1)...P(A_n/A_{n-1}\cap ...A_1)}$$

▪ **Teorema das Probabilidades Totais**

Sexa $\{A_i\}_{i\in N} \subset Q$ tal que $A_i\cap A_j=\emptyset\ \forall i\neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ e $P(A_i)>0\ \forall i\in N$, entón se $B\subset Q$

$$\mathbf{P(B)= \sum_{i\in N} P(B/A_i)\cdot P(A_i)}$$

$$P(B)= \sum_{i\in N} P(B\cap A_i)= P(\bigcup_{i\in N} (B\cap A_i))=P(B\cap(\bigcup_{i\in N} A_i))=P(B\cap\Omega)=P(B)$$

Podemos calcular a probabilidade dun suceso sumando as probabilidades deste suceso intersecado (a pares) con unha serie de sucesos que conforman unha partición do espazo mostral. *Mediante a intersección podemos empregar as probabilidades condicionadas.*

▪ **Teorema de Bayes**

Sexa $\{A_i\}_{i\in N} \subset Q$ tal que $A_i\cap A_j=\emptyset\ \forall i\neq j$ e $\bigcup_{i\in N} A_i=\Omega$ e $P(A_i)>0\ \forall i\in N$, entón se $B\subset Q$

con $P(B)>0$

$$\mathbf{P(A_i/B)= \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i\in N} P(B/A_i)P(A_i)}}\quad \forall i\in N$$

vén de $P(A_i/B)=P(A_i\cap B)/P(B)=P(B/A_i)P(A_i)/P(B)$

Independéncia de sucesos

Def.- Sexan $A, B \in Q$ diremos que A e B son independentes $\Leftrightarrow$

1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
2) $P(A/B)=P(A)$
3) $P(B/A)=P(B)$

Nota:
Non existe relación entre seren dous sucesos independentes e incompatíbeis. Non tén nada que ver.

Proposición.-

Se A e B son independentes $\Rightarrow$

1) A e $\bar{B}$ son independentes
2) $\bar{A}$ e B son independentes
3) $\bar{A}$ e $\bar{B}$ son independentes
4) $\bar{A}$ e $\bar{B}$ son independentes

demostración:

A e $\bar{B}$: $P(A\cap \bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$

Independéncia de sucesos

Def.- Sexa $P \subset Q$ unha familia de sucesos non baleira. Diremos que os sucesos son independentes se para toda subfamilia finita de sucesos $\{A_{i1},A_{i2},...,A_{in}\}$ se verifica que

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{ij}\right)=\prod_{j=1}^{n} P(A_{ij})$$

▪ Exercício *Temos un sistema electrónico que consta de 10 compoñentes que funcionan independentemente tendo cada un unha probabilidade de fallo de 0.05. Calcular a fiabilidade dun novo sistema no que se conectan en paralelo dous sistemas iguais ao descrito.*

Entendemos que para funcionar en serie todos os compoñentes da serie deben funcionar ($\cap$) mentres que para funcionar en paralelo abonda con que un dos elementos do paralelo funcione ($\cup$).

F_i = “funciona a compoñente i”

$P(F_1)=P(F_2)=...=P(F_{10})=0.95$

$P(F_1\cap F_2\cap...F_{10})\underset{\uparrow}{=}P(F_1)P(F_2)...P(F_{10})=0.95^{10}=0.5987$

sucesos independentes

$P(S_1\cup S_2)=P(S_1)+P(S_2)-P(S_1\cap S_2)=0.5987+0.5987-(0.5987)^2=0.8389$

▪ Exercício *Nun exame tipo test a probabilidade de que un aluno saiba a resposta é 0.6. A probabilidade de que responda ao azar é 0.2 e a de que non responda é 0.2. Se o estudante respondeu correctamente, cal é a probabilidade de que saiba a resposta?*

$P(R)=0.6$ R=saber a Resposta
$P(A)=0.2$ A=contestar ao Azar
$P(N)=0.2$ N=Non contestar

$P(R/C)$? C=Contestar

Hai-se que dar conta que o sistema que nos dan é completo.

$R\cup A\cup N=\Omega$

$R \cap A \cap N = \varnothing$

$$P(R/C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/R)P(R)}{P(C)} = \frac{P(C/R)P(R)}{P(C/R)P(R)+P(C/A)P(A)+P(C/N)P(N)}$$

As probabilidades condicionadas que precisamos son obvias

$P(C/R)=1$
$P(C/A)=0.2$
$P(C/N)=0$

$$P(R/C) = \frac{0.6}{0.6+0.2\cdot 0.2} = 0.9375$$

▪ Exercício [B7] *Nunha clase hai 16 nenos e 24 nenas, dos cais a metade das nenas e a metade dos nenos teñen o pelo negro. Cal é a probabilidade de que escollido un ao azar sexa neno ou teña o pelo negro?*

$P(O)=16/40$
$P(A)=24/40$

$P(O \cap N)=8/40$
$P(A \cap N)=12/40$
$P(N)=20/40$

$P(N \cup O)$?

$P(N \cup O)=$
$P(N)+P(O)-P(N \cap O)$
$=$
$20/40+16/40-8/40$
$=$
0.7

▪ Exercício [B15] *No lonxano reino de Falandia, aos condenados a morte concedia-se-lles a gracia de que a sua vida dependese de que sacasen unha bola branca no seguinte sorteo: poñian-se 50 bolas brancas nunha urna e 50 negras na outra, vendando os ollos do candidato e escollendo este unha urna e tomando unha bola dela.*

Mas en certa ocasión un reo pediu a gracia de que lle deixasen distribuir as bolas de outro modo antes de facer o sorteo. Tras algunha decisión dos expertos, concedéu-se-lle a gracia, e colocou unha bola branca nunha urna e na outra 49 bolas brancas e 50 negras.

Demostrar que o reo conseguiu, mercede a esta hábil maniobra, aumentar a probabilidade de sair con vida.

Sistema I: $P(\text{Urna I})=P(\text{Vida})=0.5=P(\text{Morte})=P(\text{Urna II})$
$P(\text{Vida})=0.5$

Sistema II: $P(\text{Urna I})=0.5=P(\text{Urna II})$
$P(\text{Vida}/\text{Urna I})=1$

P(Vida/Urna II)=0.4949...
P(Vida)=P(Vida/Urna I)P(Urna I)+P(Vida/Urna II)P(Urna II)=
=1·0.5+0.4949...·0.5=0.7474...

▪ Exercício [B17] *Nunha universidade na que só hai estudantes de arquitectura, ciéncias e letras, rematan a carreira o 5% de arquitectura, 10% de ciéncias e 20% de letras. Sábe-se que o 20% estudan arquitectura, o 30% ciéncias, e o 50% letras.*

Escollendo un estudante ao azar, píde-se:

a) probabilidade de que sexa de arquitectura e teña rematado a carreira.
b) di-nos que ten rematada a carreira. Probabilidade de que sexa de arquitectura.

a)
P(R/A)=0.05
P(R/C)=0.1
P(R/L)=0.2
P(A)=0.2
P(C)=0.3
P(L)=0.5
$P(A\cap R)=P(R\cap A)=P(R/A)P(A)=0.05\cdot 0.2=0.01$

b)

$$P(A/R)=P(A\cap R)/P(R)=\frac{P(A\cap R)}{P(R\cap A)+P(R\cap C)+P(R\cap L)}=$$

$$=\frac{P(A\cap R)}{P(R/A)P(A)+P(R/C)P(C)+P(R/L)P(L)}=\frac{0.01}{0.05\cdot 0.2+0.1\cdot 0.3+0.2\cdot 0.5}=$$

$= 0.0714285$

▪ Exercício [B20] *Na secretaria do Reitor non se pode confiar. A probabilidade de que se lle esqueza chamar á muller do Reitor para dicir-lle que está nunha xunta de governo, mentres éste se enrolla co seu chófer, é 2/3. A muller do Reitor está chea de tantos contos. Son as duas da mañá e o seu marido non aparece. Se a secretaria a chama, existe a mesma posibilidade de que ao dia seguinte lle poña as maletas na rua de que non o faga, pero se non a chama só hai un 25% de probabilidade de que olvide o asunto até a vindeira ocasión. Ao chegar á casa (ás cinco da mañá, olleiroso, ebrio, descamisado e erutando) o Reitor atopa as suas cousas guindadas polas escaleiras (incluido o seu osiño de peluche favorito). Cal é a probabilidade de que a sua secretaria non teña chamado á sua muller?*

$P(C)=1/3;\ P(\overline{C})=2/3$ C=Chamar
$P(R/C)=0.5=P(\overline{R}/C)$ R=botar á Rua
$P(R/\overline{C})=0.75$
$P(\overline{R}/\overline{C})=0.25$

$P(R/\overline{C})P(\overline{C})$

$$P(\overline{C}/R)=P(\overline{C}\cap R)/P(R)=P(R/\overline{C})P(\overline{C})/P(R)=\frac{\qquad}{P(R\cap C)+P(R\cap \overline{C})}=$$

$$= \frac{P(R/\bar{C})P(\bar{C})}{P(R/C)P(C)+P(R/\bar{C})P(\bar{C})} = \frac{0.75\cdot 2/3}{0.5\cdot 1/3+0.75\cdot 2/3} = 0.75$$

▪ Exercício [B13] *En Nova Inglaterra a distribución dos 4 grupos sanguíneos básicos é como segue:*

0	*45%*
A	*40%*
B	*10%*
AB	*5%*

Cal é a probabilidade de que nun matrimonio de Nova Inglaterra, seleccionado ao azar...

a) ambos sexan de tipo 0?
b) nengún sexa de tipo 0?
c) a dona sexa de tipo A e o cabaleiro de tipo B?
d) un sexa de tipo A e outro de tipo B?
e) sexan de tipos diferentes?

a)

$P(0)=0.45$
$P(A)=0.4$
$P(B)=0.1$
$P(AB)=0.05$

$P(0\cap 0)=0.45^2=0.2025$

b)

$P(\bar{0}\cap \bar{0})=0.55^2=0.3025$

c)

$P(A\cap B)=0.4\cdot 0.1=0.04$

d)

$P((A\cap B)\cup(B\cap A))=2\cdot 0.4\cdot 0.1=0.08$

e)

$P(\text{diferentes})=1-P(\text{iguais})=1-0.45^2-0.4^2-0.1^2-0.05^2=0.625$

▪ Exercício [B12] *As equipas de fútbol Dínamo de Kiev e Atlético de Madrid, de cada 6 partidos que xogan, por regra xeral, o Dínamo gaña 3 veces, perde 2 e empatan 1. Realizan un torneo, consistente en xogar 3 partidos. Achar as seguintes probabilidades*

a) que o Dínamo gañe os tres partidos
b) dous partidos rematen en empate
c) o Atleti gañe ao menos un partido

a)

$P(G\cap G\cap G)=0.5^3=0.125$

b)

$P[E\cap E\cap((G\cup P)\cup(G\cup G)\cup(P\cup P))]=1/6\cdot 1/6\cdot[(0.5+1/3)+(0.5+1/3)+(0.5+1/3)]=$
$=0.0694$

c)

P(Atleti gañe ao menos 1)=1-P(Atleti non gañe nengún)=1-P(Dínamo non perda nengún)=$1-P(\bar{P}\cap \bar{P}\cap \bar{P})=1-(2/3)^3=0.7$

▪ Exercício [B9] *Unha urna contén duas bolas brancas e unha negra. Tres xogadores sacan, sucesivamente, unha bola da urna sen devolve-la á mesma. Gaña o primeiro que obteña a bola negra. Calcular quen ten maior probabilidade de gañar.*

$P(1^o)=1/3$

$P(2^o)=$
$P(2^o \cap 1^o)+P(2^o \cap \overline{1}^o)$
$=$
$P(2^o/1^o)\cdot P(1^o)+P(2^o/\overline{1}^o)\cdot P(\overline{1}^o)$
$=$
$0\cdot 1/3+1/2\cdot 2/3$
$=$
$1/3$

$P(3^o)=$
$P(3^o \cap \overline{2}^o \cap \overline{1}^o)$
$=$
$P(3^o/\overline{2}^o \cap \overline{1}^o)\cdot P(\overline{2}^o \cap \overline{1}^o)$
$=$
$P(3^o/\overline{2}^o \cap \overline{1}^o)\cdot P(\overline{2}^o/\overline{1}^o)\cdot P(\overline{1}^o)$
$=$
$1\cdot 0.5\cdot 2/3$
$=$
$1/3$