TEMA IV: PROBABILIDADE

Introdución

Noción de probabilidade $\longrightarrow$ inferéncia estatística

Experimento (proceso mediante o cal se obtén observación) $\rightarrow$ determinación do conxunto de resultados posíbeis = ***Espazo Mostral***

Hai dous tipos de experimentos:

- Deterministas: en cada realización do experimento coñecemos o resultado de antemán.
- Alatórios: o experimento pode dar lugar a diversos resultados. Os resultados posíbeis son coñecidos pero é imposíbel determinar cal vai ser o que se obteña en cada unha das realizacións do experimento.

Álxebra de sucesos

Suceso **elemental**: cada un dos posíbeis resultados do experimento aleatório. (Tamén chamado evento elemental).

Espazo mostral ω: conxunto de todos os sucesos **elementais**.

Pode ser:

finito	ex. tirar un dado
infinito numerábel	números naturais
contínuo	números reais

Suceso ou evento: cada un dos subconxuntos posíbeis do espazo mostral.

Sucesos especiais:

suceso seguro Ω: aquel suceso formado pola unión $\cup$ de todos os sucesos elementais.

suceso baleiro $\varnothing$: aquel suceso formado por nengún suceso elemental.

Advírta-se que cada suceso ou evento está formado pola unión $\cup$ de cero, un ou mais sucesos elementais. Polo tanto enténde-se que un suceso ocorre cando ocorre polo menos un dos sucesos elementais que o conforman.

Un conceito distinto do espazo mostral ω é μ

ω é o conxunto de sucesos elementais
μ é o conxunto de todos os sucesos

Dadas estas definicións é o mesmo dicer que $A \subseteq \omega$ que dicer que $A \in \mu$

$$\mathbf{A} \subseteq \omega \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \mu$$

Dados dous sucesos A, B, elementos de μ póden-se dar as seguintes operacións sobre eles:

unión $\cup$	$A\cup B$	ocorre cando ocorre A, ou ocorre B, ou ambos
intersección $\cap$	$A\cup B$	ocorre cando ocorren A e B
complementário	$\overline{A}$	ocorre se e só se non ocorre A
implicación $\Rightarrow$	$A\Rightarrow B$	ocorre se sempre que ocorre A tamén ocorre B
diferéncia \ ou -	$A\backslash B$	ocorre cando ocorre A pero non ocorre B
dif.simétrica ∇	$A\nabla B$	ocorre cando ocorre $(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

Dous sucesos din-se incompatíbeis se $A\cap B=\emptyset$

Definición axiomática de **Probabilidade**

Sexa ω o espazo mostral dun experimento.
Defíne-se ***probabilidade*** como unha función de valor numérico tal que:

$$P: \omega \longrightarrow R \qquad A \rightsquigarrow P(A)$$

póde-se poñer μ en troques de ω

a cada evento $A \subseteq \omega$ $[\Leftrightarrow A\in\mu]$ asígna-lle un número P(A)

que compre os seguintes axiomas:

[1] $P(A)\geq 0$

[2] $P(\Omega)=1$ $\qquad \Omega=\cup A_i \quad A_i$ suceso elem.

[3] $A_i\cap A_j=\emptyset \ \forall i\neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

A definición formal de probabilidade e a asignación real de probabilidades a cada evento posíbel do espazo mostral forman, ambas, o ***modelo probabilístico*** dun experimento.

Propriedades da probabilidade

sendo A e B Î m

(1) [3] $\Rightarrow$ se $A\cap B=\emptyset \Rightarrow \mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$ [póde-se xeneralizar]

(2) $\mathbf{A\subseteq B} \Rightarrow \mathbf{P(A)\leq P(B)}$ porque $P(B)=P(A\cup \bar{A}B)\underset{\substack{\uparrow\\ [3]\\ A\cap \bar{A}B=\emptyset}}{=}P(A)+\underset{\substack{\downarrow [2]\\ \geq 0}}{P(\bar{A}B)}$

(3) $\forall A\subseteq S\ P(A)\leq P(\Omega) \Rightarrow \mathbf{P(A)\leq 1}$

(4) $P(\Omega)=\underline{1}=P(\Omega\cup\emptyset)\underset{\substack{\uparrow\\ [3]\\ \Omega\cap\emptyset=\emptyset}}{=}P(\Omega)+P(\emptyset)=\underline{1+P(\emptyset)} \Rightarrow \mathbf{P(\emptyset)=0}$

(5) $\mathbf{P(\bar{A})=1-P(A)}$ porque $P(\Omega)=\underline{1}=P(\bar{A}\cup A)\underset{\substack{\uparrow\\ [3]\\ \bar{A}\cap A=\emptyset}}{=}\underline{P(\bar{A})+P(A)}$

(6) $\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

(7) $\mathbf{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) = ?}$ (indeterminado)

(8) $\mathbf{P(\cup A_i) \leq \Sigma P(A_i)}$

- **Método frecuentista**

En muitos problemas póde-se calcular a frecuéncia relativa dun suceso e compróba-se que dita frecuéncia tende a estabilizar-se ao aumentar o número de realizacións do experimento. O que leva a definir a probabilidade dun suceso como o límite de dita frecuéncia.

- **Método clásico**

Consiste en atopar relacións que nos permitan calcular a probabilidade de sucesos elementais. Soe utilizar-se en sucesos equiprobábeis.

- **Método subxectivo**

É aquel no que unha persoa determinada asigna as probabilidades de forma subxectiva segundo o seu proprio critério sobre a verosimilitude de cada resultado. Engloba aos dous anteriores.

<u>Regra de Laplace</u>

Dado <u>calquera</u> suceso, defíne-se a probabilidade de dito suceso como

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{casos favorábeis}}{\text{casos posíbeis}}}$$

Exemplo: lanzamento dunha moeda. P(cruz)=1/2. P(cara)=1/2.

Exercício: Unha compañia tén duas tendas. Sábe-se que o 30% dos clientes potenciais mercan produtos só na tenda I, o 50% merca na tenda II, o 10% merca nas tendas I e II, e o 10% dos consumidores non mercan en nengunha das duas. Sexa A o evento de que un cliente potencial, seleccionado ao chou, merque en I; e B o evento en que merque en II. Calcular as seguintes probabilidades:

(a) $P(A)$
(b) $P(A\cup B)$
(c) $P(\bar{B})$
(d) $P(AB)$
(e) $P(A\cup \bar{B})$
(f) $P(\bar{A}\,\bar{B})$
(g) $P(\overline{A\cup B})$

As probabilidades que nos dan son

$P(A\cap \bar{B})=0'3$
$P(B\cap \bar{A})=0'5$
$P(A\cap B)=0'1$ (d)
$P(\overline{A\cup B})=0'1$ (g)

(a)

$$\underline{P(A)}=P(A\cap S)=P(A\cap(B\cup \bar{B}))=P((A\cap B)\cup(A\cap \bar{B}))=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=0'1+0'3=\underline{0'4}$$

↑

(AÇB)Ç(AÇ`B)=AÇ(BÇ`B)=AÇÆ=Æ

(b)

$$\underline{P(A\cup B)}=1-P(\overline{A\cup B})=1-0'1=\underline{0'9}$$

(c)

$$\underline{P(\bar{B})}=P(S\cap \bar{B})=P((A\cup \bar{A})\cap \bar{B})=P((A\cap \bar{B})\cup(\bar{A}\cap \bar{B}))=P(A\cap \bar{B})+P(\bar{A}\cap \bar{B})=$$

↑

(AÇ`B)Ç(`AÇ`B)=(AÇ`A)Ç`B=ÆÇ`B=Æ

$$=P(A\cap \bar{B})+P(\overline{A\cup B})=0'3+0'1=\underline{0'4}$$

(e)

$$P(A\cup \bar{B})=P(\overline{\overline{A\cup \bar{B}}})=P(\overline{\bar{A}\cap B})=1-P(\bar{A}\cap B)=1-0'5=0'5$$

(f)

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0'9=0'1$$

Regras de Conteo útiles en probabilidade

- **Teorema** [regra da multiplicación]

  Se a primeira tarefa dun experimento dá como resultado n_1 resultados posíbeis, e ——***para cada un destes***—— a segunda tarefa dá como resultado n_2 resultados posíbeis, entón téñen-se $n_1 \cdot n_2$ resultados posíbeis para as duas tarefas xuntas.

A regra da multiplicación amplia-se a mais tarefas sucesivas (por exemplo, un experimento en tres etapas). Os diagramas de árbores son útiles para obter a lista de resultados e permiten determinar o número de elementos no espazo mostral dun experimento.

Exemplo: Unha empresa vai construir unha pranta no oeste e outra no este. No este hai catro cidades candidatas e no oeste hai duas cidades candidatas. Obtemos o espazo mostral mediante un diagrama en forma de árbore:

Cidades candidatas no este: A, B, C, D
Cidades candidatas no oeste: E, F

```
   /E
 A \F
/
 B /E
/  \F

\  /E
 C \F
\
 D /E
   \F
```

Espazo mostral = {AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF}

O problema que ainda resta por resolver é a asignación de probabilidades a cada evento do espazo mostral, para completar o modelo probabilístico.

Consideramos que as oito seleccións posíbeis son equiprobábeis:

$$P(AE)=P(AF)=P(BE)=P(BF)=P(CE)=P(CF)=P(DE)=P(DF)=1/8$$

$$P(E)=P(AE\cup BE\cup CE\cup DE)\underset{\uparrow}{=}P(AE)+P(BE)+P(CE)+P(DE)=1/8+1/8+1/8+1/8=1/2$$

calquera intersección de dous eventos de entre estes catro dá $\varnothing$ porque só se pode escoller unha das catro cidades do este.

Exemplo: Un taller traballa cada dia con dous motores escolleitos ao chou dos cinco motores dos que dispón. Os motores 1 e 2 son do proveedor I e os 3, 4 e 5 son do proveedor II. O motor 2 é defectuoso. Calcular a probabilidade de seleccionar o motor defectuoso, e a probabilidade de seleccionar un ou os dous motores do proveedor I.

S_1 e S_2 son os motores seleccionados
$A \equiv$ seleccionar defectuoso $\equiv (S_1=2)\cup(S_2=2)$
$B \equiv$ seleccionar do proveedor I $\equiv (S_1 \in I)\cup(S_2 \in I)$

Diagrama de árbore

1	2
	3
	4
	5
2	1
	3
	4
	5
3	1
	2
	4
	5
4	1
	2
	3
	5
5	1
	2
	3
	4

Espazo mostral={12, 13, 14, 15, 21, 23, ..., 54}

P(12)=P(13)=...=P(54)=1/20

$P(A)=P(12\cup 21\cup 23\cup 24\cup 25\cup 32\cup 42\cup 52)=$

calquera par intersecado destes oito dá $\varnothing$

$=P(12)+P(21)+P(23)+P(24)+P(25)+P(32)+P(42)+P(52)=8\cdot 1/20=0'4$

$P(B)=P(12\cup 13\cup 14\cup 15 \cup 21\cup 23\cup 24\cup 25 \cup 31\cup 32 \cup 41\cup 42 \cup 51\cup 52)=14/20=0'7$

calquera par intersecado destes catroce dá $\varnothing$

VARIACIÓNS

O número de arranxos ordenados, de r obxectos seleccionados entre n obxectos distintos, $r \le n$, está dado por

$$V_{n,r}=n(n-1)...(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Idea: Téñen-se n bolas distintas a colocar e r urnas, $n \ge r$. Estamos contando o número de formas distintas que hai de poñer unha bola en cada urna.

A primeira urna hai n formas de enche-la, porque dispoñemos de todas as bolas para poñer a que queiramos. Cando chegamos á segunda urna unha das bolas xa a deixamos antes na primeira urna, así que haberá (n-1) formas de encher esta segunda urna. Repetindo o razonamento até chegar á derradeira urna, obtemos a serie xeométrica. A fórmula obtémo-la do factorial do derradeiro elemento entre o factorial do primeiro elemento menos un.

Exemplo: n=5 bolas, cada unha dunha cor distinta $\{b_1 ..., b_5\}$
r=3 urnas $\{u_1 ..., u_3\}$. En cada urna vai unha bola.

Posibilidades u_1	Posibilidades u_2	Posibilidades u_3
b_1	b_2	b_3 b_4 b_5
	b_3	b_2 b_4 b_5
	b_4	b_2 b_3 b_5
	b_5	b_2 b_3 b_4

Esta táboa só representa a primeira posibilidade de cinco para encher a primeira urna. En total as variacións $V_{5,3}=5\cdot4\cdot3=5!/2!=60$ xeitos distintos de encher as tres urnas cada unha con unha das cinco bolas.

Vemos que nas variacións **importa a orde** de selección.

PERMUTACIÓNS

Cando falamos do número de xeitos posíbeis de ordenar n elementos, falamos de **permutacións** de n elementos:

$$P_n=n!=n\cdot(n-1)...2\cdot1$$

*Nóte-se a relación coas variacións. Por esta, en algúns textos ás variacións cháma-se-lles *permutacións de r elementos seleccionados de entre n* xa que se define “arranxo ordenado” como “permutación”.

PERMUTACIÓNS CON REPETICIÓN

ver mais abaixo

VARIACIÓNS CON REPETICIÓN

$VR_{n,r} = n^r$

COMBINACIÓNS

O número de subconxuntos disxuntos, ou **combinacións**, de tamaño r que se poden seleccionar de n obxectos distintos, $r \le n$, é

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Vemos que nas combinacións **non importa a orde** de selección.

Idea: O número de *subconxuntos ordenados* era $V_{n,r}=n!/(n-r)!$ e como o número de formas de ordenar r elementos é r! resulta a fórmula.

Exercício: Nunha proba participan duas mulleres e oito homes. Dos dez participantes escollerán-se tres. Cal é a probabilidade de escoller exactamente unha muller entre os tres seleccionados?

—casos favorábeis: escoller unha muller ≡ escoller unha muller das duas e escoller dous homes dos oito.

—casos posíbeis: escoller tres elementos de entre dez, sen que importe a orde en que se faga.

solución: $$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = 7/15$$

Exercício: Unha serie de candidatos están ordenados en función da sua aptitude para optar a un posto. A compañia contrata a dous opositores de entre todos ao azar, sen ter en conta as suas aptitudes. Cal é a probabilidade de que se contrate exactamente a un dos dous primeiros clasificados na proba?

—casos favorábeis: escoller un de entre os dous primeiros ≡ escoller un de entre os dous e que o outro non sexa de entre os dous primeiros.

—casos posíbeis: escoller dous elementos dun total indefinido n.

solución: $$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{n-2}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

PERMUTACIÓNS CON REPETICIÓN

O número de xeitos de dividir n obxectos distintos en k grupos que conteñen $n_1, n_2, \dots, n_k$ obxectos respectivamente, é

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} \qquad \text{onde } \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Idea: no primeiro grupo selecciónan-se n_1 dos n elementos. No segundo grupo selecciónan-se n_2 dos $n-n_1$ restantes. No terceiro grupo selecciónan-se n_3 dos $n-n_1-n_2$ restantes. Así sucesivamente até esgotar os n elementos. De acordo coa definición de combinación e a regra da multiplicación:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-\dots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{(n-\dots-n_{k-1})!}{n_k!\underbrace{(n-\dots-n_{k-1}-n_k)!}_{0}} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} \qquad \text{onde } \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Exemplo: Tén-se que repartir 10 empregados entre 3 postos. O número de prazas para os postos I, II e III son respectivamente 3, 4 e 3. De cantas formas distintas se pode facer o reparto?

$$PR^{10}_{3,4,3} = \frac{10!}{3!4!3!} = 4.200 \text{ formas distintas}$$

Se tres dos empregados deben ser asignados ao posto I, cal é a probabilidade de que isto aconteza nunha asignación aleatória dos postos?

$$\frac{PR^{3}_{3}\cdot PR^{7}_{3,4}}{4.200} = \frac{7!/(3!4!)}{4.200} = 1/120$$

▪ Exercício: *Se un campeonato de liga regular de fútbol se compón de 22 equipos, respostar...*

a) Cal é o número de partidos que se disputan se todos os equipos teñen que enfrentar-se a todas as outras escadras?

b) Cal é o número mínimo de xornadas necesárias para completar o campeonato?

Supoñamos que xogan catro equipos

a b
 c
 d
b a
 c
 d
c a
 b
 d
d a
 b
 c

4 x 3 = 12 partidos

importa a orde xa que (a,b) xóga-se na casa de a mentres que (b,a) xóga-se na casa de b. Así pois o número de partidos neste exemplo é:

$V_{4,2}$= 4! / (4-2)! = 4·3·2 / 2 = 12

Polo tanto para 22 escadras a resposta é:

a) $V_{22,2}$= 22! / 20! = 22·21·20! / 20! = 22·21 = 462 partidos

En canto ao número mínimo de xornadas, temos que:

462 partidos = [nº partidos por xornada] x [nº xornadas]

Como son 11 equipos e cada partido o disputan 2 escadras, en cada xornada haberá como máximo (que é o que nos interesa para que o número de xornadas sexa mínimo) 11 partidos. Así pois:

c) nº xornadas = 462 / 11 = 42 xornadas

▪ Exercício: *Unha enciclopedia en cinco volumes colóca-se nunha estanteria de forma aleatória. Calcular a probabilidade de que a colocación resulte na orden natural.*

O número de formas distintas de ordenar os cinco tomos é 5!

Pola lei de Laplace, a resposta é 1/120

▪ <u>Exercício</u>: *Un lote de 26 compoñentes contén 6 defectuosos. Extráe-se unha mostra aleatória sen reemprazamento de lote de 4 compoñentes.*

a) Cal é a probabilidade de que todos os compoñentes sexan non defectuosos?

b) Cal é a probabilidade de obter 2 defectuosos e 2 non defectuosos?

a)

$$\frac{\binom{6}{0}\binom{20}{4}}{\binom{26}{4}} = \frac{20!/(4!\cdot 16!)}{26!/(4!\cdot 22!)} = \frac{20!\cdot 4!\cdot 22!}{26!\cdot 4!\cdot 16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23} = 0.32408$$

b)

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{20}{2}}{\binom{26}{4}} = \frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{20!}{2!18!}}{\frac{26!}{4!22!}} = \frac{6!20!4!22!}{2!4!2!18!26!} = 0.19063$$

▪ <u>Exercício</u>: *Lánzan-se 3 dados. Cal é a probabilidade de obter dous uns e un seis?*

$$\frac{PR^{2,1}_{3}}{VR_{6,3}} = \frac{3!/2!}{6^3} = \frac{6/2}{6\cdot 6\cdot 6} = \frac{1}{72} = 0.0138$$

▪ <u>Exercício</u>: *Cantas fichas hai nun xogo de dominó sabendo que sobre cada ficha hai dous símbolos escollidos do conxunto {0,1,...,6}?*

$$CR_{7,2}= \binom{8}{2}=8!/(2!6!)=8\cdot 7/2=4\cdot 7=28$$

▪ <u>Exercício</u>: [V.7] *Nunha sá atópan-se reunidas 20 persoas. Cal é a probabilidade de que todos teñan o mesmo cumpreanos? Cantas persoas debe haber na habitación para que a probabilidade de que polo menos duas de elas teñan o mesmo cumpreanos sexa maior de 1/2?*

a)

casos favorábeis: $V_{365,20}=365!/(345!20!)$

casos posíbeis: $VR_{365,20}=365^{20}$

aplicamos Laplace

b)

n=número de persoas

$P=\binom{365}{n}/365^n \Rightarrow 1-P>1/2 \Leftrightarrow P<1/2$

dando valores conclúe-se que $n\geq 23$

▪ Exercício: [IV.14] *No interior dun círculo selecciόna-se un ponto ao azar. Calcular a probabilidade de que o ponto estexa mais próximo ao centro da circunferéncia.*

Un ponto está mais preto do centro en función da porción do radio r que o separa do mesmo

casos favorábeis: área da circunferéncia interna (radio r/2) = $\pi r^2/4$
casos posíbeis: toda a área da circunferéncia (radio r) = πr^2
por Laplace, a resposta é 0.25

▪ Exercício: *Dous alunos da faculdade acordan reunir-en-se entre as catro e as cinco da tarde na biblioteca. Se ambos chegan de forma independente e uniforme en dita hora, e deciden non agardar mais de un cuarto de hora, cal é a probabilidade de que se reúnan?*

resolución gráfica

5:00

			xxxx xxxx
		xxxx xxxx	
	xxxx xxxx		
xxxx xxxx			

4:00 5:00

dividimos a hora en catro cuartos: 15 min./60 min. = 0.25

x=hora á que chega o aluno 1
y=hora á que chega o aluno 2

imaxínen-se as rectas:
y=x+0.25 (diagonal por enriba das xxx)
y=x-0.25 (diagonal por debaixo das xxx)

xxx = área favorábel = 1-(0.75·0.75) = <u>0.4375</u> é a resposta
a área posíbel é 1