TEMA VIII: DISTRIBUCIÓNS NOTÁBEIS DISCRETAS

▪ **Proceso de Bernouilli** é un experimento consistente en observar se os individuos dunha povoación, mirando se compren ou non determinada característica, verificándo-se:

1º) a proporción de individuos que apresentan a característica observada é constante en cada observación e denotámo-la por p (a proporción de individuos que non a apresentan é q=1-p)

2º) as observacións son independentes

▪ **Distribución BINOMIAL** de parámetros n e p (tamaño mostral e proporción de individuos con característica, respectivamente) é a que segue a variábel aleatória x definida nun proceso de Bernouilli como x=nº de individuos coa caracteristica observada, na mostra [$x \in B(n,p)$]

Características de x: é discreta, tomando valor en 0,1,...,n e a función de probabilidade de x ven dada por

$$\boxed{P(x=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}}$$

i=0,1,...,n está tabulada

E(x)=np
Var(x)=npq
B(1,p)=distribución de Bernouilli

- Exemplo: *Nunha fábrica realíza-se o seguinte control: diariamente, escóllen-se 15 unidades e míra-se cantas hai defectuosas detendo o proceso se hai duas ou mais defectuosas. Sábe-se que a porcentaxe de defectuosas é 0.05. Cal é a probabilidade de que o proceso se deteña un dia calquera?*

x=nº de unidades defectuosas

$$P(x\geq 2)= 1-P(x<2) = 1-P(x=0)-P(x=1) = 1-0.95^{15}-15!/14!\cdot 0.05\cdot 0.95^{14} = 0.1709525$$

- Exemplo: *Ao introducir dados a probabilidade de cometer un erro é de 0.001.*
  a) Cantos dados se poden introducir de maneira que a probabilidade de non cometer mais de un erro sexa polo menos 0.95?
  b) Ao pasar 5.000 dados, que número de erros se espera?

a)

x=nº de dados erróneos

$P(x\leq 1)=P(x=0)+P(x=1)\geq 0.95$

$P(x=0)=0.999^n$
$P(x=1)=n\cdot 0.001\cdot 0.999^{n-1}$

$P(x\leq 1)=0.999^{n-1}\cdot 0.999+n\cdot 0.001\cdot 0.999^{n-1}=0.999^{n-1}\cdot(0.999+0.001n)\geq 0.95$

$n=355\Rightarrow P(x\leq 1)=0.9501704$
$n=356\Rightarrow P(x\leq 1)=0.9499212$

A resposta é que se poden entrar 355 dados como máximo

b)

$E(x)=np=5000\cdot(0.001)=5$ agárda-se que se cometeran 5 erros

▪ **Proceso de Poisson** é un experimento consistente en observar a aparición de sucesos discretos sobre soporte contínuo (xeralmente sobre o tempo) verificándo-se:

1º) A longo prazo o número meio de sucesos é constante (λ)
2º) Os sucesos aparecen aleatoriamente de forma independente

▪ **Distribución de POISSON** de parámetro λ (número meio de sucesos ocurridos no intervalo considerado) é a que segue a variábel aleatória x definida en (un intervalo fixo de) un proceso de Poisson, como x="número de sucesos ocurridos no intervalo considerado" [$x \in P(\lambda)$]

Características de x: é discreta, toma valores 0,1,2,... e póde-se considerar como o límite dunha distribución binomial cando $n \to \infty$ e $p \to 0$ * de forma que $np=\lambda$ constante e a función de probabilidade é

$$\boxed{P(x=i)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{i!}}\qquad i=0,1,2,...$$

E(x)=λ
Var(x)=λ

*demostración

$$P(x=i)=\lim_{n\to\infty}(x_n=i)=\lim_{n\to\infty}\text{(n sobre i)}(\lambda \text{ sobre } n)^{i}(1-\lambda/n)^{n-i}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-i+1)}{i!}\cdot\frac{\lambda^{i}}{n^{i}}\cdot\frac{(1-\lambda/n)^{n}}{((n-\lambda)/n)^{i}}=$$

$$=\frac{\lambda^{i}}{i!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-i+1)}{(n-\lambda)^{i}}\cdot(1-\lambda/n)^{n}=$$

$$=\frac{\lambda^{i}}{i!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n-\lambda)}\cdot\frac{(n-1)}{(n-\lambda)}\cdot\frac{(n-i+1)}{(n-\lambda)}\cdot ... \cdot(1-\lambda/n)^{n}=\frac{\lambda^{i}}{i!}\cdot e^{-\lambda}$$

▪ Exercicio [27] *A probabilidade de que un estudante aprobe determinado exame é 0.3. Se se presentan 7 alunos á proba, determíne-se:*

a) probabilidade de que non aprobe nengún
b) número esperado de aprobados
c) probabilidade de que aproben os 7
d) probabilidade de que ao menos dous aproben

É un proceso de Bernouilli: observar se se dá determinada característica (aprobar ou non aprobar).

a)

$P(x=0)=\binom{7}{0}\,0.3^0\cdot 0.7^7 = 0.0823543$

b)

$\mu=np=7\cdot 0.3=2.1$ alunos

c)

$P(x=7)=\binom{7}{7}\,0.3^7\cdot 0.7^0 = 0.0002187$

d)

$P(x\geq 2)=1-P(x<2)=1-P(x=0)-P(x=1)=1-0.0823543-[7\cdot 0.3\cdot 0.7^6]=0.6705828$

▪ Exercicio [VIII.1] ***O xerente dun restaurante que só dá servizo mediante a reserva sabe por experiéncia que o 15% das veces as persoas que reservan mesan non asisten. Se o restaurante aceita 25 reservas pero só dispón de 20 mesas, cal é probabilidade de que todas as persoas que asisten a un restaurante se lles asigne mesa?***

P(acudir)=0.85
P(non acudir)=0.15
Contamos o nº de persoas que acoden: $x\in B(n,p)$ con n=25, p=0.85
Para aproximar pola normal é necesário que n>30 e npq>5, así que non podemos.

$P(x\leq 20)=1-P(x>20)=1-[P(x=21)+P(x=22)+P(x=23)+P(x=24)+P(x=25)]=$

$= 1 -(25 \text{ sobre } 21)\cdot 0.85^{21}\cdot 0.15^4$
$-(25 \text{ sobre } 22)\cdot 0.85^{22}\cdot 0.15^3$
$-(25 \text{ sobre } 23)\cdot 0.85^{23}\cdot 0.15^2$
$-(25 \text{ sobre } 24)\cdot 0.85^{24}\cdot 0.15^2$
$-(25 \text{ sobre } 25)\cdot 0.85^{25}\cdot 0.15^1=$

$= 1 -25!/(21!4!)\cdot 0.85^{21}\cdot 0.15^4$
$-25!/(22!3!)\cdot 0.85^{22}\cdot 0.15^3$
$-25!/(23!2!)\cdot 0.85^{23}\cdot 0.15^2$
$-25!/(24!1!)\cdot 0.85^{24}\cdot 0.15^2$
$-25!/(25!0!)\cdot 0.85^{25}\cdot 0.15^1=$

$= 1 -25\cdot 24\cdot 23\cdot 22/(4\cdot 3\cdot 2)\cdot 0.85^{21}\cdot 0.15^4$
$-25\cdot 24\cdot 23/(3\cdot 2)\cdot 0.85^{22}\cdot 0.15^3$
$-25\cdot 24/2\cdot 0.85^{23}\cdot 0.15^2$
$-25\cdot 0.85^{24}\cdot 0.15$
$-0.85^{25}=$

$= 1 -0.2109856$
-0.2173792
-0.1606715
-0.0758726
$-0.0171978=$

$= 0.3178932$

▪ Exercicio [VIII.5] *Un centro de cálculo presta servizos de ordenador polos que cobra 15,000 pts á hora. As avarias que se poden producir no ordenador* ε*, seguen unha lei de Poisson de média 0.2 por hora e o custo de reparar as* ε *avarias ven dado por 2,000*ε^2 *mais 3,000 de mantemento xeral á hora.*

- *i) Probabilidade de que en 5 horas de servizo non se teñan producido avarias.*
- *ii) Benefício agardado por hora de servizo.*
- *iii) Calcular o número de horas de prestación de servizo que maximiza o benefício agardado.*

i)

ε = "nº avarias por hora" $\in P(0.2)$

$E(\varepsilon)=Var(\varepsilon)=0.2$

$$P(\varepsilon=0)=\frac{e^{-0.2}\cdot 0.2^0}{0!}=0.8187307$$

$\Rightarrow$ P(5 horas sen avarias)=$0.8187307^5=0.3678793$

ou...

P(5 horas sen avarias) é $P(\varepsilon=0)$ con $\lambda=0.2\cdot5=1$

$$P(\varepsilon=0)=\frac{e^{-1}\cdot 1^0}{0!}=0.3678794$$

ii)

ganáncia (por hora)=15,000

custo (por hora)= $3,000+2,000\varepsilon^2$

benefício=ganáncia-custo

$E(\text{benefício})=E(15,000-3,000-2,000\varepsilon^2)=12,000-2,000\cdot E(\varepsilon^2)$

$Var(x)=E(x^2)-E(x)^2 \Rightarrow Var(\varepsilon)=0.2=E(\varepsilon^2)-E(\varepsilon)^2=E(\varepsilon^2)-0.2^2$

$\Leftrightarrow E(\varepsilon^2)=0.2+0.04=0.24 \Rightarrow E(\varepsilon^2)=11,520$

iii)

▪ Exercicio *Nunha área xeográfica determinada, o 60% dos votos foron para o partido A. Se se consideran 5 votantes desa área, calcular:*

- *a) Probabilidade de que exactamente 3 teñan votado a ese partido*
- *b) Probabilidade de que nengún lle teña votado*

a)

$P(A)=0.6$

contamos o nº de individuos coa característica: experimento de Bernouilli, distribución binomial

$P(x=3)=(5 \text{ sobre } 3)\cdot0.6^3\cdot0.4^2=0.3456$

b)

$P(x=0)=(5 \text{ sobre } 0)\cdot0.6^0\cdot0.4^5=0.01024$

▪ Exercicio *Dous xadrecistas de igual mestria xogan ao xadrez, que é mais probábel: gañar duas de catro partidas ou gañar tres de seis partidas?*

P(gañar)=0.5

é unha distribución binomial, no primeiro caso B(4,0.5) e no segundo B(6,0.5):

$P(x=2)=(4 \text{ sobre } 2)\cdot 0.5^2\cdot 0.5^2=0.375$
$P(x=3)=(6 \text{ sobre } 3)\cdot 0.5^3\cdot 0.5^3=0.3125$

É mais probábel que aconteza o primeiro.