TEMA 1: Conjuntos e aplicaçons

Noçom intuitiva de conjunto, subconjunto e complementário, uniom e intersecçom de conjuntos. Produto cartesiano.
Definiçom de aplicaçom, tipos de aplicaçons, composiçom de aplicaçons, inversa de umha aplicaçom.

Def.- Conjunto é umha colecçom de elementos bem definida. Isto quer dizer que em todo momento se sabe se um elemento dado pertence ou nom ao mesmo.

Os conjuntos soem-se denotar por letras maiúsculas. A pertença de um elemento x a um conjunto A representa-se co símbolo $\in$: $x \in A$.

Hai dous jeitos de representar os conjuntos:

1ª) *Por extensom*: consiste em listar entre chaves, separados por vírgulas, todos os elementos do conjunto. Sem repetir, sem importar a ordem em que se listem.

p.ex. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

2ª) *Por compreensom*: consiste em indicar entre chaves a(s) propriedade(s) que verificam os elementos que fam parte do conjunto.

p.ex. $A = \{ x \in Z \ / \ 1 \leq x \leq 4 \}$

A representaçom de conjuntos mediante diagramas de Venn (i.e. regions do plano cos elementos no seu interior) nom tem valor demonstrativo salvo quando serve de contraexemplo, em ordem a fazer evidente a falsidade de umha afirmaçom.

Def.- Cardinalidade (ou tamanho) de um conjunto A, denotado $|A|$ ou $\#A$, é o número de elementos que tem.

A cardinalidade de um conjunto pode ser finita ou infinita; os conjuntos podem ser finitos ou infinitos.

p.ex.

$A = \{x \in Z \ / \ 1 \leq x \leq 4\}$ tem um número finito de elementos.
$A = \{x \in R \ / \ 1 \leq x \leq 4\}$ tem um número infinito de elementos.

Os conjuntos infinitos subdividem-se em duas classes. Se um conjunto tem infinitos elementos di-se que é:

- *infinito numerável*: se existe umha aplicaçom bijectiva entre o conjunto e o conjunto dos números naturais, N.
- *infinito nom numerável*: em caso contrário. E.g. O conjunto dos números reais, R, é infinito nom numerável (existem infinitos decimais).

Às vezes aos conjuntos finitos chama-se-lhes *alfabetos* e aos seus elementos *letras*.

Def.- Conjunto vazio ou valeiro é aquel que nom tem nengum elemento, e denota-se $\varnothing$

Dous conjuntos som iguais se têm os mesmos elementos.

Def.- Di-se que A é <u>subconjunto</u> de B, ou que A está contido ou incluído em B, ou que B contém a A, se $\forall$ a $\in$ A, a $\in$ B; e denota-se A $\subseteq$ B.

Dado um conjunto qualquer A, o conjunto valeiro $\emptyset$ e o mesmo conjunto A som <u>sempre</u> subconjuntos de A:

$\forall$ A, A $\subseteq$ A
$\forall$ A, $\emptyset \subseteq$ A

Quando A é um subconjunto de B e ademais A $\neq$ B, dizimos que A é um subconjunto próprio de B e isto denota-se A $\subset$ B.

Observaçons sobre as notaçons:

A$\subseteq$B significa que A é subconjunto de B (i.e. que A é o mesmo conjunto que B, <u>ou</u> que A é um subconjunto próprio de B).

B$\supseteq$A é a mesma cousa que A$\subseteq$B.

A$\subset$B implica que A$\neq$B, por isso nom aparece a linha inferior do símbolo $\subseteq$, porque nom pode ser igual.

A$\subseteq$B nom exclui a possibilidade de que A$\subset$B.

A$\subset$B implica que A$\subseteq$B, mas A$\subseteq$B nom implica que A$\subset$B, já que pode ser que A=B.

Equivalem x$\in$A e {x}$\subseteq$A.

Exemplos relativos à notaçom:

Dado A = {3, -1, 2}

3 $\subseteq$ A é umha expressom falsa porque 3 é um <u>elemento</u> de A, nom um subconjunto.

3 $\in$ A é umha expressom verdadeira porque o 3 aparece listado como elemento de A.

{3} $\subseteq$ A é umha expressom verdadeira porque todos os elementos do conjunto {3} o som do conjunto A.

{3} $\in$ A é umha expressom falsa porque {3} nom aparece listado como elemento de B.

Dado B = {{7}, {6,1}, {5,2}, {4,3}}

7 $\in$ B é umha expressom falsa porque 7 nom aparece listado como elemento de B.

{7} $\in$ B é umha expressom verdadeira porque o elemento {7} aparece listado como tal em B.

7 $\subseteq$ B é umha expressom falsa porque 7 nom é conjunto assim que nom pode ser subconjunto.

{7} $\subseteq$ B é umha expressom falsa porque ao menos um dos elementos do conjunto {7}, concretamente 7, nom é elemento de B.

Em termos da inclusom, dous conjuntos som iguais se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B;\ B \subseteq A$$

Def.- Conjunto potência de um conjunto dado A, ou conjunto partes de A é o conjunto de todos os subconjuntos possíveis de A, e denota-se como $\wp(A)$ ou 2^A:

$$\wp(A) = \{B / B \subseteq A\}$$

p.ex. Dado A = {a, 1, 0'6}

$$\wp(A) = \begin{array}{l} \{\emptyset, \\ \{a\}, \{1\}, \{0'6\}, \\ \{a, 1\}, \{a, 0'6\}, \{1, 0'6\}, \\ A\} \end{array}$$

(é dizer: por linhas,
subconjuntos de zero elementos,
subconjuntos de um elemento,
subconjuntos de dous elementos,
subconjuntos de três elementos)

Cardinalidade do conjunto potência: $|A| = n \Rightarrow |\wp(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

no exemplo anterior, $|\wp(A)| = 2^{|3|} = 8$

dem.

Umha combinaçom de n elementos tomados de m em m na que a ordem dos mesmos é irrelevante (polo tanto, falamos de conjuntos) é:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = C_{n,\ m}$$

$|\wp(A)|$

|| ← por definiçom de combinaçom

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{subconjuntos de zero elementos}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{subconjuntos de um elementos}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{subconjuntos de n elementos}}$$

|| ← binómio de Newton para x=y=1

$$\binom{n}{0}\cdot x^n\cdot y^0 + \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot y + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot x\cdot y^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot x^0\cdot y^n$$

||

$(1+1)^n$

||

2^n

$$|\wp(A)| = (1+1)^n = 2^n$$

Exercício 1.1

"A = {{a}, 0}. Calcular $\wp$(A)."

a priori, sabemos que $|\wp(A)| = 2^2 = 4$

$\wp$(A) = {∅,
{{a}}, {0},
A}

Exercício 1.2

"A = {**{**a, {a}**}**, {b}, a}. Calcular $\wp$(A)."

a priori, sabemos que $|\wp(A)| = 2^3 = 8$

$\wp$(A) = {∅,
{{a, {a}}**}**, {{b}}, {a},
{{a, {a}}, {b}**}**, **{**{a, {a}}, a**}**, **{**{b}, a**}**
A}

Exercício 1.3

"Indicar se a expressom é verdadeira ou falsa."

∅ ∈ {a, b, c}	falso (nom consta na lista)
{∅} ∈ {a, b, c}	falso (nom consta na lista)
∅ ⊆ {a, b, c}	verdadeiro (trivial)
{∅} ⊆ {a, b, c}	falso (porque ∅ ∉ {a, b, c})
{a} ∈ {{a}}	verdadeiro (consta na lista)
{a} ⊆ {{a}}	falso (porque a ∉ {{a}})
{a} ∈ {a, {a}}	verdadeiro (consta na lista)
{a} ⊆ {a, {a}}	vedadeiro (porque a ∈ {a, {a}})
∅ ∈ {∅, {∅}}	verdadeiro (consta na lista)
∅ ⊆ {∅, {∅}}	verdadeiro (trivial)
∅ ∈ {{∅}}	falso (nom consta na lista)
{∅} = {0}	falso (e tamém parvada)

Exercício 1.4

"Para os seguintes conjuntos A, calcular $\wp$(A):
a) A = ∅
b) A = {∅}
c) A = {√3}
d) A = {a,b,{a}}
e) {{a,b,c}}"

a) $\#\emptyset=0 \Rightarrow \#\wp(\emptyset)=2^0=1$
$\wp$(A) = {∅}

b) $\#A=1 \Rightarrow \#\wp(A)=2^1=2$
$\wp$(A) = {∅,{∅}}

c) $\#A=1 \Rightarrow \#\wp(A)=2^1=2$
$\wp$(A) = {∅,{√3}}

d) $\#A=3 \Rightarrow \#\wp(A)=2^3=8$

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\},\{b\},\{\{a\}\}, \{a,b\},\{a,\{a\}\},\{b,\{a\}\}, \{a,b,\{a\}\} \}$$

e) $\#A=1 \Rightarrow \#\wp(A)=2^1=2$

$$\wp(A) = \{\emptyset,\underline{\{\{}a,b,c\underline{\}\}}\}$$

Exercício 1.5

"Demonstrar se é certo ou nom que $\wp(A\cup B)=\wp(A)\cup\wp(B)$."

Contraexemplo: $A=\{1,2,3\}$ $B=\{3,4,5\} \Rightarrow \{1,4\}\in\wp(A\cup B)$ pero $\{1,4\}\notin\wp(A)\cup\wp(B)$. Ergo a proposiçom é falsa.

"$\supseteq$"

$$C \in \wp(A)\cup\wp(B) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C \in \wp(A) \Rightarrow C \subseteq A \subseteq A\cup B \\ \text{ou} \\ C \in \wp(B) \Rightarrow C \subseteq B \subseteq A\cup B \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \in \wp(A\cup B)$$

Esta implicaçom cumpre-se.

"$\subseteq$"

$$C \in \wp(A\cup B) \Rightarrow C \subseteq A\cup B \not\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C \in \wp(A) \\ \\ C \in \wp(B) \end{array} \right.$$

Esta implicaçom nom se cumpre porque pode haver conjuntos da uniom que nom estejam incluídos só a A ou só a B.

$\underline{\wp(A)\cup\wp(B)\subseteq\wp(A\cup B)}$

Exercício 1.6

"Demonstrar se é certo ou nom que $\wp(A\cap B)=\wp(A)\cap\wp(B)$."

$C \in \wp(A\cap B) \Leftrightarrow C \subseteq A\cap B \Leftrightarrow C\subseteq A$ e $C\subseteq B \Leftrightarrow C\in\wp(A)$ e $C\in\wp(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C\in\wp(A)\cap\wp(B)$ c.q.d.

Nas operaçons com conjuntos trabalha-se com um conjunto —chamado "conjunto universal"— de referência (explícita ou implicitamente):

$$\{x\in R/x^2-2=0\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \neq \{x\in N/x^2-2=0\} = \emptyset$$

Todo conjunto é subconjunto deste conjunto universal, denotado genericamente como U.

Def.- Complementário de um conjunto dado A é aquel onde estám todos os elementos (do universo) excepto os que pertencem a A:

$$\overline{A} = A^c = A' = \{x\in U/x\notin A\}$$

Ex.

$U=Z$; $A=\{2\lambda/\lambda\in Z\} \Rightarrow A'=\{2\lambda+1/\lambda\in Z\}$

Ex.

$U=R$; $A=Q \Rightarrow A'=I$

Def.- Complementário de A respeito a B ou diferença entre A e B sendo A e B conjuntos do mesmo universo A, B $\subseteq$ U:

$$A-B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Def.- Uniom de A e B:

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Def.- Intersecçom de A e B:

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Def.- Diferença simétrica de A e B:

$$A \oplus B = \{x \in A \text{ ou } x \in B / x \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Das propriedades vistas, deduze-se que $A-B = A \cap B'$

dem. $x \in A-B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$

Propriedades que verificam as operaçons com conjuntos

A, B, C $\in \wp(U)$

[1] Comutatividade da uniom:	$A \cup B = B \cup A$
Comutatividade da intersecçom:	$A \cap B = B \cap A$
[2] Associatividade da uniom:	$(A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C)$
Associatividade da intersecçom:	$(A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$
[3] Distributividade da uniom respeito da intersecçom:	
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Distributividade da intersecçom respeito da uniom:	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
[4] Elemento Identidade:	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap U = A$
Elemento nulo:	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup U = U$
Elemento complementário, inversibilidade:	$A \cup A' = U$
	$A \cap A' = \emptyset$
[5] Involuçom:	$(A')' = A$
[6] Idempotência:	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
[7] Absorçom:	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$
[8] Leis de DeMorgan:	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
(geralizáveis a n conjuntos)	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demonstraçons de propriedades que verificam as operaçons com conjuntos

[1] Comutatividade

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A$ ou $x\in B \Leftrightarrow x\in B$ ou $x\in A \Leftrightarrow x\in B\cup A$

$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A$ e $x\in B \Leftrightarrow x\in B$ e $x\in A \Leftrightarrow x\in B\cap A$

[2] Associatividade

$x\in (A\cup B)\cup C \Leftrightarrow x\in A\cup B$ ou $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ ou $x\in B$ ou $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ ou $x\in B\cup C \Leftrightarrow x\in A\cup (B\cup C)$

$x\in (A\cap B)\cap C \Leftrightarrow x\in A\cap B$ e $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ e $x\in B$ e $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ e $x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A\cap (B\cap C)$

[3] Distributividade

"$A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$"

$x \in A\cup(B\cap C) \Rightarrow x\in A$ ou $x\in (B\cap C) \Rightarrow$

- se $x \in A \Rightarrow x\in A\cup B$ e $x\in A\cup C \Rightarrow x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- se $x\in (B\cap C) \Rightarrow x\in B$ e $x\in C \Rightarrow x\in A\cup B$ e $x\in A\cup C \Rightarrow x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$

"$A\cup(B\cap C) \supseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$"

$x \in (A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow x\in A\cup B$ e $x\in A\cup C \Rightarrow$

A	ou B	e A	ou C	
0	1	0	1	$\Rightarrow x\in B\cap C \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$
0	1	1	0	hipótese impossível
0	1	1	1	hipótese impossível
1	0	0	1	hipótese impossível
1	0	1	0	$\Rightarrow x\in A \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$
1	0	1	1	$\Rightarrow x\in A \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$
1	1	0	1	hipótese impossível
1	1	1	0	$\Rightarrow x\in A \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$
1	1	1	1	$\Rightarrow x\in A\cap(B\cap C) \Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

"1" significa "certo"
"0" significa "falso"

"$A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$"

$x \in A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ e $x\in B\cup C \Rightarrow x\in A$ e, $x\in B$ ou $x\in C \Rightarrow x\in A$ e $x\in B$, ou $x\in A$ e $x\in C \Rightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)$

"$A\cap(B\cup C) \supseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$"

$x \in (A\cap B)\cup(A\cap C) \Rightarrow$

- se $x\in A\cap B \Rightarrow x\in B \Rightarrow x\in B\cup C \Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$
- se $x\in A\cap C \Rightarrow x\in X \Rightarrow x\in B\cup C \Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$

[8] Leis de DeMorgan

"$(A\cup B)'=A'\cap B'$"

$x\in (A\cup B)' \Leftrightarrow x\notin A\cup B \Leftrightarrow x\notin A$ e $x\notin B \Leftrightarrow x\in A'$ e $x\in B' \Leftrightarrow x\in A'\cap B'$

"$(A\cap B)'\subseteq A'\cup B'$"

$x\in (A\cap B)' \Rightarrow x\notin A\cap B \Rightarrow x\in A$ e $x\notin B$, ou $x\notin A$ e $x\in B$, ou $x\notin A$ e $x\notin B \Rightarrow x\notin B$, ou $x\notin A$, ou $x\notin A$ e $x\notin B \Rightarrow x\notin A$ ou $x\notin B \Rightarrow x\in A'$ ou $x\in B' \Rightarrow x\in A'\cup B'$

ergo $(A\cap B)'\subseteq A'\cup B'$

"$A'\cup B'\subseteq (A\cap B)'$"

$x\in A'\cup B' \Rightarrow x\in A'$ ou $x\in B' \Rightarrow x\notin A$ ou $x\notin B \Rightarrow x\notin A$ e $x\notin B$, ou $x\notin A$ e $x\in B$, ou $x\in A$ e $x\notin B \Rightarrow x\in (A'\cap B')\cup(A'\cap B)\cup(A\cap B') \Rightarrow x\notin (A\cap B) \Rightarrow x\in (A\cap B)'$

ergo $A'\cup B'\subseteq (A\cap B)'$

Da inclusom mútua temos que $A'\cup B'=(A\cap B)'$

$(\wp(U),',\cup,\cap)$ é umha Álgebra de Boole.

Def.- Produto de conjuntos: Sejam A, B conjuntos; chama-se produto (cartesiano) de ambos, denotado AxB, ao conjunto de parelhas ordenadas onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo, a B:

$$AxB = \{(a,b)/a\in A;\ b\in B\}$$

Exemplo: Dados $A = \{\{a\}, 3\}$; $B = \{0, 3, \emptyset\}$

$$AxB = \{(\{a\}, 0), (\{a\}, 3), (\{a\},\emptyset), (3, 0), (3, 3), (3,\emptyset)\}$$

Cardinalidade do produto de conjuntos finitos:

$$|A|=n;\ |B|=m;\ n, m \in N \Rightarrow |AxB|=n\cdot m$$

Em geral, pode-se definir o produto cartesiano de mais de um conjunto: Sejam A_1, A_2, ..., A_m conjuntos, define-se

$$A_1xA_2x...xA_m=\{(a_1, a_2, ..., a_m)/\ a_1\in A_1;\ a_2 \in A_2;\ ...;\ a_m \in A_m\}$$

$$\#A_1xA_2x...xA_m= \#A_1\cdot\#A_2...\#A_m$$

Note-se que o produto cartesiano nom é comutativo: $AxB \neq BxA$

Os produtos cartesianos sucessivos de um conjunto por si mesmo representam-se por A^2=AxA, A^3=AxAxA, etc.

Def.- Aplicaçom ou funçom. Sejam A, B conjuntos. Umha aplicaçom f: A $\rightarrow$ B é umha lei que a cada elemento (a **todos e cada um**) do primeiro conjunto lhe associa **um só elemento** do segundo, e denota-se a $\sim\!\!\rightarrow$ f(a). A f(a) chama-se-lhe imagem do elemento a mediante a funçom f.

Assim pois para que umha correspondência entre dous conjuntos A e B seja umha aplicaçom ou funçom ham de cumprir-se duas condiçons:

i) Todos os elementos de A ham de ter imagem.

ii) A cada elemento de A corresponde-lhe um só elemento de B.

Exemplo:

f: R $-\!\!\rightarrow$ R
x $\sim\!\!\rightarrow$ $f(x)=x^2+3$ é umha funçom. Cumpre as duas condiçons.

f: N $-\!\!\rightarrow$ N
n $\sim\!\!\rightarrow$ $f(n)=\lambda\in N/\lambda>n+3$ nom é umha funçom porque cada elemento tem mais de umha imagem. Nom cumpre a condiçom ii).

f: R $-\!\!\rightarrow$ R
x $\sim\!\!\rightarrow$ $f(x)=\sqrt{x}$ nom é funçom por duas razons: porque hai elementos como -4 que nom têm imagem, e porque hai outros como 4 que têm duas imagens. Nom cumpre nengumha das duas condiçons.

Quando A e B som conjuntos finitos, o número de possíveis funçons de A a B é $\#B^{\#A}$.

Ao conjunto de partida A, chama-se-lhe domínio e ao de chegada B, chama-se-lhe codomínio; sendo a imagem ou rango da funçom subconjunto do codomínio: $\mathrm{Im}\, f = \{f(a)/a\in A\} \subseteq B$

Exemplo:

f: A={1,2,3} $\rightarrow$ B={3,a,b}
1 $\sim\!\!\rightarrow$ f(1)=a
2 $\sim\!\!\rightarrow$ f(2)=a
3 $\sim\!\!\rightarrow$ f(3)=3

f é umha aplicaçom porque todos os elementos de A têm umha imagem e só umha.
A é o domínio.
B é o codomínio.
Im f={3,a} $\subseteq$ B={3,a,b}

Dadas $f:A\rightarrow B$; $g:C\rightarrow D$, se A=C, B=D e $f(x)=g(x)\ \forall x\in A=C$, di-se que as aplicaçons som iguais.

Classificaçom das aplicaçons

f é INJECTIVA $f:A \longrightarrow B$

def.alt.: $\mathbf{f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2}$

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

interp.: *é umha relaçom 1 a 1 pero pode haver* b's *sem antiimagem.*

aplicaçom	<u>injectiva</u>
todos 1 / só 1	$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$
A B	
• ⟶ •	
• ⟶ •	<u>INJECTA</u>
• ⟶ •	
•	
•	

def. intu. $\begin{cases} \text{nec.: 1 - 1} \\ \text{nom nec.: b's com antiimagem} \end{cases}$

f é SOBREJECTIVA $f:A \longrightarrow B$

def.alt.: $\forall\ \mathbf{b} \in \mathbf{B}\ \exists\ \mathbf{a} \in \mathbf{A}\ /\ \mathbf{f(a) = b}$

Im f = B

interp.: *imagem da funçom e codomío coincidem.*

aplicaçom	<u>sobrejectiva</u>
todos 1 / só 1	$\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A\ /\ f(a) = b$
A B	
• ⟶ •	
• ⟶ •	<u>SOBRE</u>
• ⟶ •	<u>COBRE</u>
• ⟶↑	

def. intu. $\begin{cases} \text{nec.: b's com antiimagem} \\ \text{nom nec.: 1 - 1} \end{cases}$

f é BIJECTIVA $f:A \longrightarrow B$

$\forall\ \mathbf{b} \in \mathbf{B}\ \exists\ ^{o}\ \mathbf{a} \in \mathbf{A}\ /\ \mathbf{f(a) = b}$

interp.: *é injectiva e sobrejectiva à vez.*

Exemplo:

$$f: A=\{1,2,3\} \rightarrow B=\{3,a,b\}$$
$$1 \rightsquigarrow f(1)=a$$
$$2 \rightsquigarrow f(2)=a$$
$$3 \rightsquigarrow f(3)=3$$

f é umha aplicaçom porque todos os elementos de A têm umha imagem e só umha.

É injectiva? $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$?
Nom porque $f(1)=f(2)$ mas $1\neq 2$

É sobrejectiva? $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A\ /\ f(a) = b$?
Nom porque nom $\exists\ a \in A\ /\ f(a) = b$

Def.- Aplicaçom de **inclusom**

Se $A \subseteq B$, define-se como $\quad$ **i: A → B**
$\quad$ **a ⇝ i(a)=a**

É a aplicaçom que leva a cada elemento do subconjunto nel mesmo pero dentro do âmbito do conjunto. Amplia-se o espectro.

Def.- Aplicaçom de **restriçom**

Se $f: B \rightarrow C$, e $A \subseteq B$,
define-se como $\quad$ **f/A: A → C**
$\quad$ **a ⇝ f/A(a)=f(a)**

É a aplicaçom que dada outra funçom f, leva os elementos de um domínio subconjunto do de f nas imagens que a mesma f subministra. Restringe-se o espectro.

Def.- Aplicaçom de **identidade**

Define-se como $\quad$ **id: A → A**
$\quad$ **a ⇝ f(a)=a**

O espectro é idêntico.

Def.- Composiçom de funçons

Sejam $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$; definimos $g^\circ f$ ("f composta com g") como:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$A \xrightarrow{\quad g^\circ f \quad} C$$

$$g^\circ f: A \rightarrow C$$
$$a \rightsquigarrow g^\circ f\ (a) = g(f(a))$$

Para poder definir a composiçom de funçons é necessário que o codomínio de f coincida co domínio de g.

A composiçom de funçons nom é umha operaçom comutativa; em geral **nom** é certo que $g^\circ f = f^\circ g$.

Sem embargo, a composiçom **sim** é associativa: $h^o(g^o f)=(h^o g)^o f$

dem. $h^o(g^o f)=(h^o g)^o f \Leftrightarrow [h^o(g^o f)](a)=[(h^o g)^o f](a)\ \forall\ a \in A$
por definiçom:

$[h^o(g^o f)](a)=h[(g^o f)(a)]=h(g(f(a)))$
$=$
$[(h^o g)^o f](a)=(h^o g)[f(a)]=h(g(f(a)))$

Propriedades da composiçom

[1] f, g	injectivas	$\Rightarrow$	$g^o f$	injectiva
[2] f, g	sobrejectivas	$\Rightarrow$	$g^o f$	sobrejectiva
[3] f, g	bijectivas	$\Rightarrow$	$g^o f$	bijectiva
[4] $g^o f$	injectiva	$\Rightarrow$	f	injectiva
[5] $g^o f$	sobrejectiva	$\Rightarrow$	g	sobrejectiva
[6] $g^o f$	bijectiva	$\Rightarrow$	f	injectiva
			g	sobrejectiva

[1], [2], [3]: os recíprocos nom se dam necessariamente.
[4]: de g nom se pode asegurar nada.
[5]: de f nom se pode asegurar nada.

- dem. [1]

hipótese i) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$
hipótese ii) $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

entom

$g^o f(x_1)=g^o f(x_2)$
$\Rightarrow$ por definiçom da composiçom
$g(f(x_1))=g(f(x_2))$
$\Rightarrow$ pola hipótese ii)
$f(x_1)=f(x_2)$
$\Rightarrow$ pola hipótese i)
$x_1=x_2$

ergo

$g^o f$ é injectiva c.q.d.

- dem. [2]

$f: A \to B$
hipótese i) $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A\ /\ f(a)=b$
$g : B \to C$
hipótese ii) $\forall\ c \in C\ \exists\ b \in B\ /\ g(b)=c$

$\forall\ c \in C\ \exists\ b \in B\ /\ g(b)=c$
$\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A\ /\ f(a)=b$
$\Rightarrow$
$\forall\ c \in C\ \exists\ b=f(a) \in B\ /\ g^o f(a)=g(f(a))=g(b)=c$

ergo

$g^o f$ é sobrejectiva c.q.d.

- dem. [3]

trivial a partir das duas prévias.

- dem. [4]

  "$g^o f$ injectiva $\Rightarrow$ f injectiva"

  hipótese:

  $g^o f(x_1)=g^o f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

  $f(x_1)=f(x_2)$
  $\Rightarrow$ $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ — por ser g umha aplicaçom ou funçom
  $\Rightarrow$ $g^o f(x_1)=g^o f(x_2)$ — por definiçom da composiçom
  $\Rightarrow$ $x_1=x_2$ — por hipótese

  ergo f é injectiva.

- dem. [5]

  "$g^o f$ sobrejectiva $\Rightarrow$ g sobrejectiva"

  hipótese:

  $\forall$ c $\in$ C $\exists$ a $\in$ A / $g^o f(a)=g(f(a))=c$

  Abonda com tomar f(a)=b já que f(a) $\in$ B por definiçom de f: A $\to$ B.
  Assim: $\forall$ c $\in$ C $\exists$ b=f(a) $\in$ B / $g^o f(a)=g(f(a))=g(b)=c$

- dem. [6]

  trivial a partir das duas prévias.

<u>Exercício 1.7</u>

"Calcular o conjunto imagem e dizer se a aplicaçom é injectiva ou sobrejectiva, dada $f:\wp(N)\to\wp(N)$ / $A \rightsquigarrow f(A)=A\cup\{1\}$."

Im f = $\{N\in\wp(N)/1\in N\}$

f injectiva? f(B)=f(C) $\Rightarrow$ B=C ?

Nom necessariamente. Seja B={2,3} e C={1,2,3}, f(B)=f(C)={1,2,3} e sem embargo $B\neq C$.

f sobrejectiva? $\forall$ D $\in$ $\wp(N)$ $\exists$ C $\in$ $\wp(N)$ / f(C) = D ?

Nom necessariamente. Todo subconjunto de N que nom contenha ao elemento 1 serve-nos de contraexemplo, porque pertence a partes de N e sem embargo nom tem antiimagem por f (nom se lhe pode "quitar" a 1 porque nom o tem).

<u>Exercício 1.8</u>

"Estudar se é injectiva ou sobrejectiva a seguinte aplicaçom:
$f:R\to R$ / $x \rightsquigarrow f(x)=x^3-x$."

f injectiva? f(x)=f(y) $\Rightarrow$ x=y

Contraexemplo: f(0)=0=f(1) e sem embargo $0\neq 1$.

f sobrejectiva? $\forall$ y $\in$ R $\exists$ x $\in$ R / f(x) = y

$x^3-x=y \Rightarrow x^3-x-y=0$ polinómio de grau três, entom existem três raizes, as três reais ou umha real e duas complexas: em qualquer caso sempre existe essa x que verifica a eqüaçom.

Propriedades da funçom identidade

$$A \xrightarrow{Id_A} A \xrightarrow{f} B$$

$$A \xrightarrow{f \circ Id_A} B \qquad (f \circ Id_A)(a)=f(Id_A(a))=f(a) \Rightarrow f \circ Id_A=f$$

$$C \xrightarrow{g} A \xrightarrow{Id_A} A$$

$$C \xrightarrow{Id_A \circ g} A \qquad (Id_A \circ g)(c)=Id_A(g(c))=g(c) \Rightarrow Id_A \circ g=g$$

Aplicaçom inversa

Seja $f: A \rightarrow B$, define-se a "inversa de f" como umha aplicaçom $g: B \rightarrow A$ que cumpre as duas propriedades seguintes:

1º) $g \circ f = Id_A$
2º) $f \circ g = Id_B$

Propr.- Se umha funçom tem inversa, esta inversa é única.

dem. Por reduçom ao absurdo. Supomos que existem duas inversas g, g' da funçom f. Entom cumprem-se, por definiçom, as propriedades:

$g \circ f=Id_A \qquad f \circ g=Id_B$
$g' \circ f=Id_A \qquad f \circ g'=Id_B$

g
$=$ por definiçom de identidade
$g \circ Id_B$
$=$ por definiçom de inversa
$g \circ (f \circ g')$
$=$ por associatividade da composiçom
$(g \circ f) \circ g'$
$=$ por definiçom de inversa
$Id_A \circ g'$
$=$ por definiçom de identidade
g'

Contradiçom coa hipótese $\Rightarrow$ a hipótese é falsa $\Rightarrow$ a funçom inversa, se existe, é única c.q.d.

- **Teorema**

Seja $f: A \rightarrow B$, f é inversível $\Leftrightarrow$ f é bijectiva.

dem.
"$\Rightarrow$"
se f tem inversa $\Rightarrow$ 1º) f é injectiva; 2º) f é sobrejectiva
1º)
Sejam $a, a' \in A$; $f(a)=f(a') \Rightarrow f^{-1}(f(a))=f^{-1}(f(a')) \Rightarrow a=a'$
2º)
Seja $b \in B$, $\exists\ a=f^{-1}(b) \in A \ /\ f(f^{-1}(b))=f(a)=b$

"$\Leftarrow$"

Dado um elemento qualquer $b\in B$, $\exists^o$ $a\in A$ / $b=f(a)$
Definimos $f^{-1}(b)=a$
É aplicaçom porque:

f sobrejectiva $\Rightarrow$ f^{-1} é aplicaçom no aspecto de que existe imagem $\forall$ $b\in B$.

f injectiva $\Rightarrow$ f^{-1} é aplicaçom no aspecto de que existe imagem única $\forall$ $b\in B$.

É inversa porque:

$(f^{-1}\circ f)(a)=f^{-1}(f(a))=a$
$(f\circ f^{-1})(b)=f(f^{-1}(b))=b$

- **Teorema**

Seja f: $A \rightarrow B$ funçom, A e B conjuntos finitos. Entom verifica-se:

i) f injectiva $\Rightarrow$ $|A|\leq|B|$
ii) f sobrejectiva $\Rightarrow$ $|A|\geq|B|$
iii) f bijectiva $\Rightarrow$ $|A|=|B|$

dem. Digamos que $|A|=m$ e $|B|=n$

i) Se a funçom é injectiva, entom sejam a_1, $a_2 \in A$, $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$
Suponhamos m>n. Se nom hai elementos de A que compartam imagem, pero todos têm imagem (por ser f funçom) e hai menos elementos no codomínio que no domínio, produze-se umha contradiçom.

ii) Se a funçom é sobrejectiva, entom $\forall$ $b\in B$ $\exists$ $a\in A$ / $f(a)=b$
Suponhamos m<n. Se todos os elementos de B têm antiimagem, pero hai mais elementos em B que em A, entom a algum elemento de A terá que corresponder-lhe mais de um elemento em B, o qual entra em contradiçom coa premisa de que f é funçom.

iii) trivial a partir das duas prévias.

- **Teorema** (de Pigeonhole ou dos ninhos e das pombas)

Seja f: $A \rightarrow B$ funçom, A e B conjuntos finitos. Entom verifica-se:

$|A|=|B|$ $\Rightarrow$ som equivalentes:

i) f injectiva
ii) f sobrejectiva
iii) f bijectiva

dem.

por definiçom, iii) implica a i) e ii); e se se dam i) e ii) entom da-se iii); é dizer: i) e ii) $\Leftrightarrow$ iii). Polo tanto o que hai que demonstrar é que i) $\Leftrightarrow$ ii).

"$\Rightarrow$" A demonstraçom fai-se considerando $|A|=n$ e $|B|=n$; n pombas vam a n ninhos, por f. Se i), entom nengumha pomba irá a um mesmo ninho que outra pomba. Nom haverá duas pombas que vaiam ao mesmo ninho, pero dado que só hai n ninhos, cada ninho receberá só umha pomba, logo ii).

"$\Leftarrow$" Se cada ninho dos n que hai recebe só umha pomba, pero de partida só hai n pombas, cada pomba irá a um só ninho. Entom i).

Exercício 1.9

"Comprovar que:

a) $f^o f^{-1}=Id_B$
b) $f^{-1} {}^o f=Id_A$"

Supomos que $f: A \to B$

Se $a \in A$, $f(a)=b$, definimos $f^{-1}: B \to A$ como $f^{-1}(b)=a$

a)

Dado um b qualquer $\in$ B, $f^o f^{-1}(b)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b$

b)

Dado um a qualquer $\in$ A, $f^{-1} {}^o f(a)=f^{-1}(f(a))=f(b)=a$

Exercício 1.10

"Demonstrar que se f tem inversa, entom existe a inversa da inversa e ademais, esta coincide coa própria f."

Por definiçom, dado $f: A \to B$, $\exists\ f^{-1}: B \to A$ t.q. $f^o f^{-1}=Id_B$ e $f^{-1} {}^o f=Id_A$

Supomos que $g: A \to B$ é a inversa de f^{-1}, entom por definiçom:

$g^o f^{-1}=Id_B$ e $f^{-1} {}^o g=Id_A$

Sexa $a \in A$ un elemento calquera, entom:

$g(a)$	
$=$	por definiçom de Id_A
$(g^o Id_A)(a)$	
$=$	por hipótese (por definiçom de f^{-1})
$[g^o(f^{-1} {}^o f)](a)$	
$=$	pola associatividade da composiçom
$[(g^o f^{-1})^o f](a)$	
$=$	por definiçom de g como inversa de f
$(Id_B {}^o f)(a)$	
$=$	por definiçom de Id_B
$f(a)$	

Ergo, g=f c.q.d.

Exercício 1.11

"Sejam f, g, h aplicaçons tais que:

$f: A \to B$
$g: B \to C$
$h: C \to A$

$h^o g^o f$ é injectiva	hipótese 1
$g^o f^o h$ é injectiva	hipótese 2
$f^o h^o g$ é sobrejectiva	hipótese 3

Demonstre-se que f, g, h som bijectivas."

hipótese 1 $\Leftrightarrow (h^o g^o f)(a_1)=(h^o g^o f)(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$
hipótese 2 $\Leftrightarrow (g^o f^o h)(c_1)=(g^o f^o h)(c_2) \Rightarrow c_1=c_2$
hipótese 3 $\Leftrightarrow \forall\ b_2 \in B\ \exists\ b_1 \in B\ /\ (f^o h^o g)(b_1)=b_2$

$f(a_1)=f(a_2)$	
$\Rightarrow$	por ser g aplicaçom
$g(f(a_1))=g(f(a_2))$	
$\Rightarrow$	por ser h aplicaçom

$h(g(f(a_1)))=h(g(f(a_2)))$
$\Rightarrow$ por definiçom da composiçom
$(h \circ g \circ f)(a_1)=(h \circ g \circ f)(a_2)$
$\Rightarrow$ pola hipótese 1
$a_1=a_2$

Ergo f é injectiva.

Analogamente, da hipótese 2 demonstra-se que h é injectiva.

hipótese 3 $\Leftrightarrow \forall\ b_2 \in B\ \exists\ b_1 \in B\ /\ (f \circ h \circ g)(b_1)=b_2$
$\Rightarrow$
$\forall\ b_2 \in B\ \exists\ a=(h \circ g)(b_1) \in B\ /\ f(a)=b_2$

Ergo f é sobrejectiva.

Polo tanto f é bijectiva, o que equival a dizer que é invertível; f^{-1} é bijectiva e polo tanto, injectiva.

A composiçom de injectivas conserva a injeçom
$\Rightarrow$ pola hipótese 1
$(h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ é injectiva
$\Rightarrow$ pola associatividade da composiçom
$h \circ g \circ (f \circ f^{-1})$ é injectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da inversa
$h \circ g \circ Id_B$ é injectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da identidade
$h \circ g$ é injectiva
$\Rightarrow$
g é injectiva

A composiçom de sobrejectivas conserva a sobrejeçom
$\Rightarrow$ pola hipótese 3
$f^{-1} \circ (f \circ h \circ g)$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola associatividade da composiçom
$(f^{-1} \circ f) \circ h \circ g$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da inversa
$Id_A \circ h \circ g$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da identidade
$h \circ g$ é sobrejectiva (*)
$\Rightarrow$
h é sobrejectiva

Polo tanto h é bijectiva, o que equival a dizer que é invertível; h^{-1} é bijectiva e polo tanto, sobrejectiva.

A composiçom de sobrejectivas conserva a sobrejeçom
$\Rightarrow$ pola conclusom (*)
$h^{-1} \circ (h \circ g)$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola associatividade da composiçom
$(h^{-1} \circ h) \circ g$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da inversa
$Id_C \circ g$ é sobrejectiva
$\Rightarrow$ pola definiçom da identidade
g é sobrejectiva

Ergo g é bijectiva.

Exercício 1.12

"Dadas f e g duas aplicaçons componíveis, demonstrar que se f e g têm inversa (f^{-1}, g^{-1} respectivamente), entom $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$."

$$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} (g \circ f)\circ(f^{-1} \circ g^{-1})=Id_C \\ (f^{-1} \circ g^{-1})\circ(g \circ f)=Id_A \end{cases}$$

$(g \circ f)\circ(f^{-1} \circ g^{-1})$
= pola associatividade da composiçom
$g\circ(f \circ f^{-1})\circ g^{-1}$
= pola definiçom da inversa
$g \circ Id_B \circ g^{-1}$
= pola associatividade da composiçom
$g \circ g^{-1}$
=
Id_C c.q.d.

A outra demonstraçom é análoga.

Exercício 1.13

"Demonstrar a equivalência de:
- i) $A \subseteq B$
- ii) $A \cap B=A$
- iii) $A \cup B=B$
- iv) $\overline{B} \subseteq \overline{A} = \overline{A}$
- v) $A \cap \overline{B}=\emptyset$"

Técnica de demonstraçom usada:
"i)⇔ii)⇔iii)⇔iv)⇔v)" ⇔ "i)⇒ii)⇒iii)⇒iv)⇒v)⇒i)"

"i)⇒ii)"
hip.: $A \subseteq B$
"$A\cap B \subseteq A$"
$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ (trivial, por definiçom da intersecçom)
"$A \subseteq A \cap B$ "
$x \in A \Rightarrow x \in A$ (trivial) e $x \in B$ (por hip.) $\Rightarrow x \in A \cap B$

"ii)⇒iii)"
hip.: $A \cap B=A$
"$A \cup B \subseteq B$"
$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B \Rightarrow$ (por hip.) $x \in A \cap B$ ou $x \in B \Rightarrow x \in B$ ou $x \in B \Rightarrow x \in B$
"$B \subseteq A \cup B$"
$x \in B \Rightarrow$ (por hip.) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cup B$ (por def. $\cup$ e de $\cap$)

"iii)⇒iv)"
hip.: $A \cup B=B$
"$(\overline{B} \subseteq \overline{A}) \subseteq \overline{A}$"
trivial
"$\overline{A} \subseteq (\overline{B} \subseteq \overline{A})$"
$x \in \overline{B} \Rightarrow$ (por hip.) $x \in (A \cup B)' \Rightarrow$ (por DeMorgan) $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in \overline{A}$ (por def. de $\cap$)

"iv)$\Rightarrow$v)"

hip.: $\overline{B} \subseteq \overline{A} = \overline{A}$

"$A \cap \overline{B} = \emptyset$"

$A \cap \overline{B}$

= por hipótese

$A \cap \overline{A}$

= complementário

$\emptyset$

"v)$\Rightarrow$i)"

hip.: $A \cap \overline{B} = \emptyset$

"$A \subseteq B$"

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap (\overline{B} \cup B) \Rightarrow x \in (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow$ (por hip.) $x \in \emptyset \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

<u>Exercício 1.14</u>

"Qual é a relaçom entre a imagem de umha funçom e o seu codomínio?"

Im $f \subseteq B$ sendo $f: A \rightarrow B$

<u>Exercício 1.15</u>

"Que duas características deve cumprir umha correspondência f entre dous conjuntos A e B para ser considerada aplicaçom?"

1º) $\forall a \in A \ \exists b \in B \ / \ f(a) = b$

2º) Dado um $b \in B \ / \ \exists a \in A$ t.q. $f(a)=b$, <u>nom</u> $\exists b' \in B$, $b' \neq b \ / \ f(a)=b'$

Ambas podem-se condensar em:

$\forall a \in A \ \exists^{o} b \in B \ / \ f(a) = b$

"todo elemento do domínio tem umha imagem e só umha"