TEMA 2: Relaçons e Grafos

Relaçons binárias, relaçons de equivalência, conjunto cociente. Relaçons de ordem, conjuntos ordenados, elementos especiais de um conjunto ordenado. Diagrama de Hasse.
Conceitos básicos e terminologia de grafos. Conexom de grafos. Grafos eulerianos e hamiltonianos. Grafos planos. Árvores. Grafos dirigidos. Coloraçom de grafos.

RELAÇONS

Definiçom: Sejam A, B conjuntos; umha relaçom (binária) entre A e B é um subconjunto do produto cartesiano de ambos conjuntos:

$$R \subseteq A \times B$$

Notaçom: $(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb$

p.ex. $aRb \Leftrightarrow a|b$

O exemplo da divisibilidade ("a divide b" ou "b é divisível por a") como relaçom é importante para sublinhar a importância da ordem dos pares: em geral, que $(a,b) \in R$ nom quer dizer que $(b,a) \in R$.

Se A, B som conjuntos finitos, umha relaçom entre A e B pode-se representar mediante...

1º) ...umha matriz $M = \#A_{filas} \cdot \#B_{colunas} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i \not R\, b_j \\ 1 \text{ se } a_i R\, b_j \end{cases}$

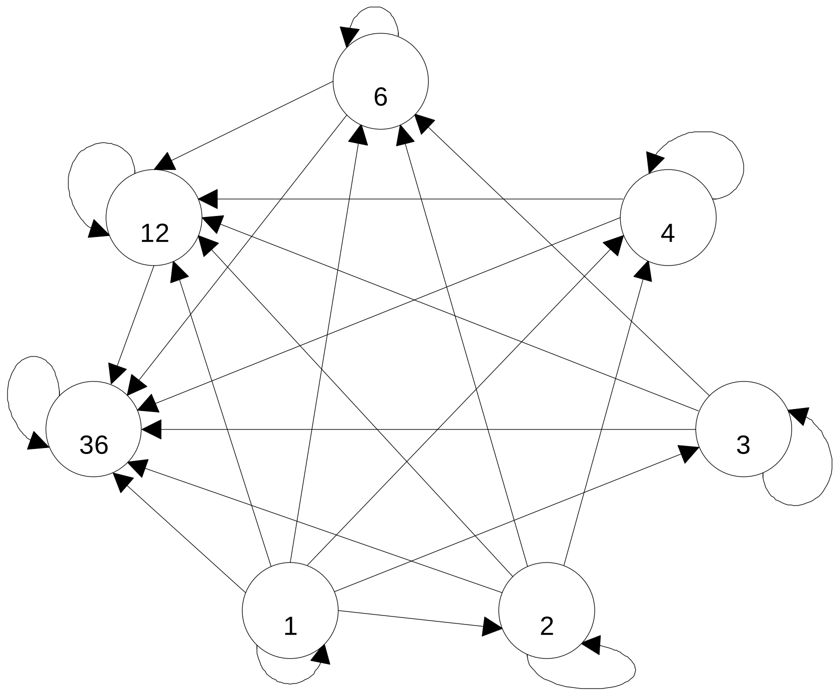
Ex. $A=\{1,2,3\}$; $B=\{a,b\}$; $R=\{(1,a),(2,b),(2,a),(3,b)\}$
$R \subseteq A \times B$

$$M_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(A partir da matriz tamém se pode *reconstruir* a relaçom)

2º) ...sempre que A=B ——isto é, a relación é entre os elementos de um mesmo conjunto—— existe outra forma de representaçom que é um grafo dirigido que tem tantos vértices como elementos, e traçando umha flecha $a_i \rightarrow a_j \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R$ (nessa ordem!).

Ex. aRb $\Leftrightarrow$ a|b com A=B={1,2,3,4,6,12,36}



Propriedades das relaçons de um conjunto em si mesmo

Seja R $\subseteq$ A x A

1ª) R **reflexiva** se "(a,a) $\in$ R $\forall$ a $\in$ A".
2ª) R **simétrica** se "(a,b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R".
3ª) R **antisimétrica** se "(a,b) $\in$ R, (b,a) $\in$ R $\Rightarrow$ a=b".
4ª) R **transitiva** se "(a,b) $\in$ R, (b,c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a,c) $\in$ R".

Ex. aRb $\Leftrightarrow$ a|b com A=B={1,2,3,4,6,12,36}

- é reflexiva
- nom é simétrica
- é antisimétrica
- é transitiva

Exercício 2.1 Seja A um conjunto. Definimos a relaçom R do seguinte modo: (B,C) $\in$ R $\Leftrightarrow$ B $\subseteq$ C sendo B, C $\in$ $\wp$(A). Analisar que propriedades cumpre.

1ª) $\forall$ B $\in$ $\wp$(A), B $\subseteq$ B $\Leftrightarrow$ (B,B) $\in$ R. É reflexiva.
2ª) A $\subseteq$ B nom implica que B $\subseteq$ A. Nom é simétrica.
3ª) A $\subseteq$ B e B $\subseteq$ A $\Rightarrow$ A=B. É antisimétrica.
4ª) A $\subseteq$ B e B $\subseteq$ C $\Rightarrow$ A $\subseteq$ C. É transitiva.

As relaçons **RAT** (Reflexivas, Antisimétricas, Transitivas) chamam-se **relaçons de ordem**.

As relaçons **RST** (Reflexivas, Simétricas, Transitivas) chamam-se **relaçons de equivalência**.

As relaçons de equivalência de cote se denotam co símbolo ~ i.e. aRb representa-se por a~b quando a relaçom é reflexica, simétrica e transitiva.

Exercício 2.2 A = Z; seja m um valor fixo $\in Z^+$; define-se aRb $\Leftrightarrow$ a-b = $m\cdot\lambda$, $\lambda\in Z$ (chamada "relaçom de congruência módulo m"). Demonstrar que é umha relaçom de equivalência.

aRb expressa-se neste caso: a $\equiv_m$ b (a congruente com b módulo m).

R) aRa $\forall$ a$\in$Z $\Leftrightarrow$ a-a = $0\cdot m$ $\Rightarrow$ é reflexiva.
S) aRb $\Rightarrow$ bRa $\Leftrightarrow$ a-b = $\lambda\cdot m$ $\Rightarrow$ b-a = $(-\lambda)\cdot m$; $-\lambda \in Z$ $\Rightarrow$ é simétrica.
T) aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc $\Leftrightarrow$ a-b = $\lambda\cdot m$; b-c = $\mu\cdot m$ $\Rightarrow$ a-c = a-b+b-c = $\lambda\cdot m+\mu\cdot m$ = $(\lambda+\mu)\cdot m$; $(\lambda+\mu) \in Z$ $\Rightarrow$ é transitiva.

Exercício 2.3 A = ZxZ^*; (a,b)R(c,d) $\Leftrightarrow$ ad=bc. Demonstrar que é umha relaçom de equivalência.

R) (a,b)R(a,b) $\forall$ (a,b) $\in ZxZ^*$ porque $a\cdot b=a\cdot b$ $\Rightarrow$ é simétrica.
S) (a,b)R(c,d) $\Rightarrow$ ad = bc $\Rightarrow$ cb = da $\Rightarrow$ (c,d)R(a,b) $\Rightarrow$ é simétrica.
T) (a,b)R(c,d); (c,d)R(e,f) $\Rightarrow$ ad = bc; cf = de $\Rightarrow$ ade = bce $\Rightarrow$ acf = bce $\Rightarrow$ af = be $\Rightarrow$ (a,b)R(e,f) $\Rightarrow$ é transitiva.

Hai que dar-se conta de que umha relaçom dada nom tem por que cumprir nengumha das quatro propriedades vistas e sem embargo é umha relaçom sempre que seja subconjunto do produto cartesiano.

Ex. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}; xRy $\Leftrightarrow$ x+y = 10

- nom é reflexiva.
- é simétrica pola comutatividade da suma.
- nom é transitiva.

Ex. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}; xRy $\Leftrightarrow$ x-y = 3

- nom é reflexiva.
- nom é simétrica.
- nom é transitiva.

Propriedades da matriz de umha relaçom

lembramos que é $M = \#A_{filas}\cdot\#B_{colunas} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i \not R\, b_j \\ 1 \text{ se } a_i\, R\, b_j \end{cases}$

1ª) Se a relaçom é reflexiva, os elementos da diagonal principal na matriz da relaçom som todos 1's.

2ª) Se a relaçom é simétrica, a matriz será simétrica respeito à diagonal principal.

3ª) Se a relaçom é antisimétrica, o elemento simétrico de um zero será um 1, e viceversa: o elemento simétrico de um 1 será um zero.

Def.- Classe de equivalência de um elemento a é o conjunto de elementos (do conjunto de referência A) cos quais a está equivalentemente-relacionado.

Isto denota-se por:

$$[a] = \{b \in A \ / \ a \sim b\}$$

Que representam as classes de equivalência [] respeito ao conjunto de referência A? O que fam as classes de equivalência é definir umha partiçom do conjunto:

Sejam $[a_1], [a_2], \ldots [a_n]$ as classes de equivalência de um conjunto A

$[a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n] = A$

$[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \ \forall \ i \neq j, \ 1 \leq i,j \leq n$

Exercício 2.4 Demonstrar que a relaçom de congruência módulo m tem m classes de equivalência.

$$\begin{aligned}
[0] &= \{b \in Z \ / \ 0 \equiv_m b\} = \{b \in Z \ / \ b = \lambda \cdot m+0, \ \lambda \in Z\} \\
&= \{0, m, -m, 2m, -2m, \ldots\} \\
[1] &= \{b \in Z \ / \ 1 \equiv_m b\} = \{b \in Z \ / \ b = \lambda \cdot m+1, \ \lambda \in Z\} \\
&= \{1, m+1, -m+1, 2m+1, -2m+1, \ldots\} \\
&\ldots \\
[m-1] &= \{b \in Z \ / \ 1 \equiv_m m-1\} = \{b \in Z \ / \ b = \lambda \cdot m+m-1, \ \lambda \in Z\} \\
&= \{m-1, 2m-1, -1, \ldots\} \\
[m] &= \{b \in Z \ / \ m \equiv_m b\} = \{b \in Z \ / \ b = \lambda \cdot m+m, \ \lambda \in Z\} \\
&= \{b \in Z \ / \ b = (\lambda+1) \cdot m = \lambda' \cdot m, \ \lambda \in Z\} = [0]
\end{aligned}$$

Exercício 2.5 Demonstrar as duas seguintes propriedades das relaçons de equivalência:

a) $[a]=[b] \Leftrightarrow a \sim b$

b) $a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

a)

"$\Rightarrow$"

$[a]=[b] \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$

"$\Leftarrow$"

$x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow$ (transitiva) $x \sim b \Rightarrow x \in [b]$ entom $[a] \subseteq [b]$

$x \in [b] \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \sim b \sim a \Rightarrow$ (transitiva) $x \sim a \Rightarrow x \in [a]$ entom $[b] \subseteq [a]$

b)

Por reduçom ao absurdo: supomos o contrário da conclusom e chegamos a umha contradiçom coa hipótese.

$$\exists \ x \in [a] \cap [b] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [a] \Rightarrow x \sim a \\ \text{ e} \\ x \in [b] \Rightarrow x \sim b \end{array} \right\} \Rightarrow a \sim b \text{ (pola transitiva)}$$

Def.- Conjunto cociente é o conjunto de classes de equivalência que induze determinada relaçom ~ num conjunto A:

$$A/\sim \ = \{[a] / a \in A\}$$

Por exemplo, $Z/\equiv_m$ é um conjunto cociente (Z_m).

Por exemplo, os racionais podemos defini-los como um conjunto cociente da seguinte maneira: $Q = ZxZ^*/\sim$ onde $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow bc=ad$.

Def.- Factorizaçom canónica de umha aplicaçom. Seja $f: A \to B$, define-se sobre A umha relaçom de equivalência que é tal que $\forall$ a, b $\in$ A, $a\sim b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$. Esta relaçom de equivalência induze umha partiçom em classes de equivalência em A. Definem-se três aplicaçons:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_1"] & B & f(a) \\ {[a]} \arrow[rrr] & A/\sim \arrow[r, "f_2"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[u, "f_3"] & f(a) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$f = f_3 o f_2 o f_1$

Cumpre-se que:

- f_1 é sobrejectiva: $\sim$ é relaçom de equivalência $\Rightarrow \sim$ é reflexiva $\Rightarrow \forall a \in A, a\sim a$; como $a \in [a]$, $\forall [a] \in A/\sim \ \exists\, a \,/\, f_1(a)=[a]$
- f_2 é bijectiva: $f_2([a])=f_1([b]) \Leftrightarrow f(a)=f(b) \Leftrightarrow a\sim b \Leftrightarrow [a]=[b]$ (injectiva); $\forall x \in \mathrm{Im}\, f\ \exists\, [a] \,/\, f_2([a])=x$ (sobrejectiva)
- f_3 é injectiva
- f é injectiva $\Leftrightarrow f_1$ é injectiva
- f é sobrejectiva $\Leftrightarrow f_3$ é sobrejectiva
- f é bijectiva $\Leftrightarrow f_1, f_3$ som bijectivas

A qüestom prática para realizar a factoriza canónica de umha funçom radica em dar coas expressons de:
-imagem de f
-umha classe genérica [x] (e consiguientemente obtermos o conjunto cociente que é o conjunto delas todas)

<u>Exercício 2.6</u> Obter a imagem das seguintes funçons assim como a forma genérica das classes de equivalência necessárias para factorizá-las canonicamente:
a) $f(x)=sen(x)$
b) $f(x)=cos(x)$
c) $f(x)=x^2$
d) $f(x)=x^3$
e) $f(x)=tg(x)$

	seno	coseno	quadrado	cubo	tangente
Im f	$[-1,+1]$	$[-1,+1]$	$[0,+\infty)$	R	R
[x]	$\{x+2\pi k,$ $\pi-x+2\pi k\}$	$\{x+2\pi k,$ $-x+2\pi k\}$	$\{x,$ $-x\}$	$\{x\}$	$\{x+2\pi k,$ $x+\pi-2\pi k\}$

Def.- Conjunto ordenado: $(A,\leq)$ onde A é um conjunto e $\leq$ é umha relaçom de ordem definida sobre A.

Def.- Umha relaçom de ordem di-se total se $\forall$ a, b $\in$ A, ou bem a$\leq$b ou bem b$\leq$a onde $\leq$ denota "relacionado (por ordem)". Umha relaçom de ordem di-se parcial se nom necessariamente dous elementos quaisquer estám relacionados em um ou em outro sentido. Um poset [*partially ordered set*] é um conjunto parcialmente ordenado, (A,$\leq$) onde $\leq$ é umha relaçom de ordem parcial.

Os diagramas de Hasse representam as relaçons de ordem e têm as seguintes três características:

1ª) Nom se pintam flechas senom linhas.
2ª) Nom se pintam laços (sobre-entende-se a reflexividade).
3ª) Nom se pinta linha de a a c sempre que haja umha linha de a a b e outra linha de b a c (sobre-entende-se a transitividade).

Elementos "especiais", "notáveis" ou "distinguidos" de um poset:

- a é maximal se nom existe b $\in$ A / b > a

  maximal é aquel que nom tem nengum elemento por em riba del

  pode haver 1 ou mais maximais

- a é minimal se nom existe b $\in$ A / b < a

  minimal é aquel que nom tem nengum elemento por debaixo del

  pode haver 1 ou mais minimais

Lema: Em todo poset existe ao menos um maximal e um minimal.

Def.- M é máximo de A se M $\geq$ x $\forall$ x$\in$A

Teorema.- Se existe máximo, é único.

Def.- m é mínimo se A se M $\leq$ x $\forall$ x$\in$A

Teorema.- Se existe máximo, é único.

Nota: Recomenda-se nom tentar usar as definiçons de máximo e mínimo nos exercícios, freqüentemente induzem a confusom e resulta mais asequível usar os seguintes teoremas:

Teorema.- Existe máximo $\Leftrightarrow$ existe único maximal

Teorema.- Existe mínimo $\Leftrightarrow$ existe único minimal

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{maximal} \xrightarrow{\text{único}} \text{máximo} \\[1em] \text{minimal} \xrightarrow{\text{único}} \text{mínimo} \end{array}}$$

Seja Q $\subseteq$ P:

Def.- p $\in$ P é cota superior de Q se p$\geq$q $\forall$ q$\in$Q

Def.- p $\in$ P é cota inferior de Q se p$\leq$q $\forall$ q$\in$Q

Teorema.- Se a cota superior $\in$ Q $\Rightarrow$ é máximo de Q

Teorema.- Se a cota inferior $\in$ Q $\Rightarrow$ é mínimo de Q

Def.- Supremo é a menor cota superior.

Def.- Ínfimo é a maior cota inferior.

$\in$ **{}**

cota superior $\xrightarrow{\in \text{ sub}\{\}}$ Supremo

cota inferior $\xrightarrow{\in \text{ sub}\{\}}$ Ínfimo

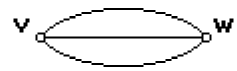
Def.- A classificaçom topológica de um ordem parcial consiste em converter um ordem parcial em ordem total (diagrama Hasse). A condiçom é que se mantenham as relaçons dous a dous: se a $\leq_{parcial}$ b $\Rightarrow$ a $\leq_{total}$ b.

Def.- Conceito de funçom "bem definida" consiste em que a imagem é independente do representante elegido.

GRAFOS

Definiçom: Um grafo G nom dirigido é um par (V,E) onde V é um conjunto finito de pontos, chamados ***vértices*** ou ***nodos*** e E é umha família de pares nom ordenados de elementos de V, chamados ***aristas***. Normalmente denotaremos $e=(v,w)$, $v, w \in V$; $e \in E$.

Co mesmo nome de arista (o mesmo par de aristas) pode haver mais de umha arista. Exemplo de arista



múltiple:

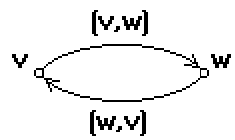
Chama-se-lhe ***família de aristas*** por isto, porque num conjunto nom pode haver três aristas (v,w)

Em caso de que a arista seja um par composto polo mesmo vértice, chamará-se-lhe *laço* (e(v,v)).

Um grafo que possua aristas múltiples chama-se ***multigrafo.*** Noutro caso dizimos que o grafo é simples.

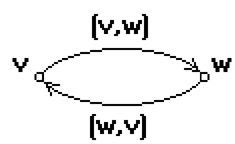
Pode-se estabelecer uma analogia destes pontos para grafos dirigidos:

Definiçom: Um grafo G dirigido é um par (V,E) onde V é um conjunto de pontos finito, chamados vértices ou nodos e E umha família de pares ordenados de elementos de V. Num grafo dirigido ocorre que $(v,w)\neq(w,v)$



*Sempre podemos transformar umha arista nom dirigida em duas dirigidas, desdobrando-a:

desdobra-se em:



$e=(v_i,v_j)$ diremos que a arista "e" ***incide*** nos vértices v_i, v_j e diremos tamém que os vértices v_i e v_j som *adjacentes*.

—Se G é nom dirigido, o número de aristas que incidem num vértice chama-se ***grau*** do vértice, $\delta(v)$

—O número de vértices de um grafo G, |V| chama-se ordem de G

—Se G é dirigido, os vértices nom têm um grau, senom dous graus: grau de saida $o\delta(v)$ ou $\delta^+(v)$ que é o número de vértices com origem no vértice; e grau de entrada $i\delta(v)$ ou $\delta^-(v)$ que é o número de aristas com destino no vértice.

Teorema 1

A suma dos graus de todos os vértices de um grafo nom dirigido G=(V,E) é igual ao dobre do número de aristas:

$$\boxed{\sum_{v\in V} \delta(v)=2\cdot|E|}$$

demostraçom

$V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ δv=nºaristas incidentes em V

Cada arista incide em dous vértices*, ao sumar o grau de cada vértice conta-se cada arista duas vezes por cada um dos vértices nos que incide.

*se a arista é um laço tamém se conta duas vezes.

Teorema 2

Num grafo dirigido:

$$\boxed{\sum_{v\in V} o\delta(v)= \sum_{v\in V} i\delta(v) = |E|}$$

demostraçom

Por cada arista contada suma-se 1 como grau de entrada a $i\delta(v)$ e 1 como grau de saída a $o\delta(v)$. Por tanto o número de aristas coincide co sumatório de graus de entrada de todos os vértices e tamém co sumatório de graus de saida de todos os vértices.

Teorema 3

Se G é um grafo nom dirigido com um número finito de vértices, o número de vértices de grau impar é par.

(sem análogo em grafos dirigidos)

demostraçom

G=(V,E)

Particionamos o conjunto de vértices V:

$V=V_1\cup V_2$

$V_1\cap V_2=\emptyset$

sendo

V_1=“conjunto de vértices de grau par”

V_2=“conjunto de vértices de grau impar”

Polo teorema 1:

$$\sum_{v\in V_1} \delta v + \sum_{v\in V_2} \delta v = \sum_{v\in V} \delta v = 2\cdot|E| \text{ é um número par}$$

os δv de $v\in V_1$ som pares; ao sumar números pares (sejam quantos sejam), obtemos um número par. Assi que temos:

$$2x + \sum_{v\in V_2} \delta v = 2y \Rightarrow$$

(2x, 2y só som para representar a paridade desses dous valores)

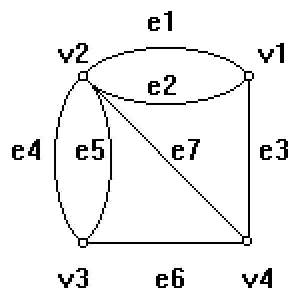
$$\Rightarrow \sum_{v \in V_2} \delta v = 2(y-x) = \text{número par}$$

polo tanto, c.q.d. o sumatório dos graus dos vértices de grau impar é um número par.

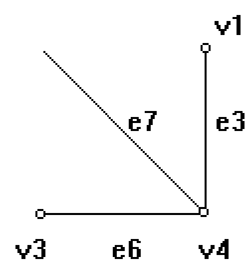
Definiçom: Seja G=(V,E); se G'=(V',E') é grafo e V'$\subseteq$ V e E'$\subseteq$ E, diremos que G' é **subgrafo** de G.

Note-se que se requirem três qualidades.

Exemplo: Dado o grafo G(V,E)...



...o seguinte construto (V',E'):



nom é um subgrafo porque a pesar de que

V'={v1,v3,v4} $\subseteq$ V

e E'=(e3,e6,e7) $\subseteq$ E

nom é grafo, polo tanto nom pode ser subgrafo.
Se engadíramos v2 a V' entom (V',E') sim seria um subgrafo de G(V,E).

A condiçom de validez de possíveis subgrafos é que as aristas de E' unam sempre vértices de V'.

CODIFICAÇOM DE GRAFOS

Matriz de adjacência

Seja $G=(V,E)$ um grafo de ordem $n=|V|$. Umha m.a. do grafo G é umha matriz A de ordem nxn onde cada elemento a_{ij} da matriz indica o número de aristas que vam desde v_i ao vértice v_j isto despois de termos dada umha lista dos vértices de G (indexá-los). Se G é nom dirigido, A é simétrica ($a_{ij}=a_{ji}$) respeito da diagonal principal.

(existe para grafos dirigidos ou nom)

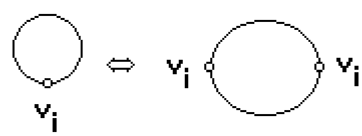
Matriz de incidência

Pode-se usar em grafos simples ou quando as aristas têm distintos nomes (como no ex. anterior). Trata-se de umha matriz M de ordem nxm onde $n=|V|$ e $m=|E|$ definida por: cada a_{ij} val 1 se e_i incide em v_j e zero se nom existe arista de e_i a v_j
Cada coluna só pode sumar 2 porque cada arista só une dous vértices.
Cada fila suma δv

(só existe para grafos dirigidos)

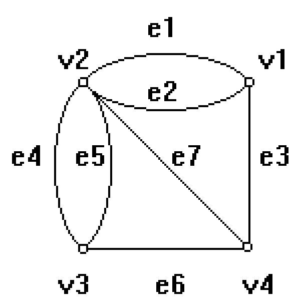
Acerca da matriz de adjacência:

- Para grafos nom dirigidos: os elementos de umha mesma fila de A sumados (ou de umha mesma coluna, que tanto dá) dam-nos o grau do vértice correspondente.
- Para grafos dirigidos:
  Σ elementos fila i = grau de saida de v_i
  Σ elementos coluna j = grau de entrada de v_j
- Cada laço em grafos nom dirigidos conta-se como um 2 (duas aristas) na matriz de adjacência, por convénio consta um 2 na posiçom i-ésima da diagonal principal:



- Se se desse a mesma situaçom em grafo dirigido, a arista já tem um sentido determinado e conta-se umha soa vez.

Exemplo: Indicar a matriz de adjacência A e a matriz de incidência M do grafo da figura:



matriz de adjacência A

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	0	1
v_2	2	0	2	1
v_3	0	2	0	1
v_4	1	1	1	0

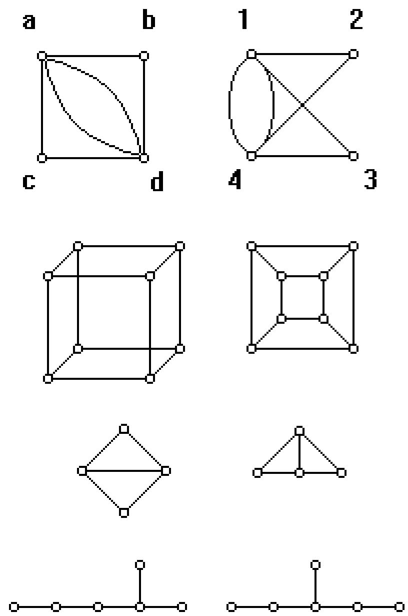
matriz de incidência M

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	1	0	1	1	0	1
v_3	0	0	0	1	1	1	0
v_4	0	0	1	0	0	1	1

ISOMORFISMO DE GRAFOS

Definiçom: dous grafos $G=(V,E)$, $G'(V',E')$ som isomorfos se existem duas aplicaçons bijectivas $f:V\rightarrow V'$ e $g:E\rightarrow E'$ tais que se $e=(v_i,v_j)$ entom $g(e)=(f(v_i),f(v_j))$

Exemplos:



Intuitivamente, o feito de que dous grafos sejam isomorfos ou nom discerne-se pola técnica de imaginar que os nodos som chinchetas que podemos mover de posiçom e que as aristas som tiras de goma flexíveis. Assi resultará que o primeiro par de grafos da figura superior som isomorfos pola correspondência:

a $\rightarrow$ 1
d $\rightarrow$ 4
c $\rightarrow$ 3
b $\rightarrow$ 2

Os pares segundo e terceiro tamém amosam grafos isomorfos entanto que os grafos da derradeira parelha nom o som.

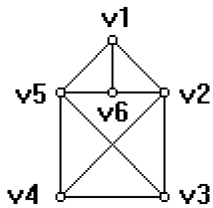
TRAJECTÓRIAS E CIRCUÍTOS

Def. **Caminho** ou **trajectória** é umha seqüência de aristas da forma (v_{i0},v_{i1}), (v_{i2},v_{i3}), ..., (v_{il-2},v_{i1-1}), (v_{il-1},v_{i1}). Dizimos que esta trajectória é de longitude l e leva desde a arista v_{i0} à v_{il}.

- $v_{i0} = v_{i1} \Rightarrow$ di-se que a trajectória é *aberta*.
- $v_{i0} \neq v_{i1} \Rightarrow$ di-se que a trajectória é *pechada* ou *circuito*.

No caso de que todos os vértices sejam distintos, agás eventualmente v_{i0} e v_{il} dirá-se que se trata de umha trajectória <u>própria</u>.

Exemplo:



$v_1v_2v_3v_5v_4v_2v_6$ trajectória de longitude 6
$v_1v_2v_6v_5v_3v_4$ trajectória própria de longitude 5

- Dous vértices de um grafo dirá-se que estám conectados se existe umha trajectória que começa num deles e remata no outro.
- Um grafo é conexo se cada par de vértices estám conectados, som acessíveis.
- Componente conexa de G é um subgrafo conexo de G que nom é subgrafo conexo de G.

Umha componente conexa de G=(V,E) é um subgrafo G'=(V',E') de G tal que nengum vértice de $v \in V-V'$ está conectado a algum vértice de G'.

- Cada componente conexa é umha clase de equivalência:

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u \text{ e } v \text{ estám conectados} \end{cases}$$

- Arista ponte ou de separaçom é umha arista (u,v) de um grafo G tal que ao eliminá-la do grafo, o conjunto de vértices conectados a u e a v respectivamente é disjunto.

Se G é conexo $\Rightarrow$ G-(u,v) terá duas componentes conexas.

Se G nom é conexo $\Rightarrow$ o número de componentes conexas de G aumenta numha unidade.