Tema 5: Cálculo de proposiçons

Sintaxe. Deducçom natural. Tábuas semánticas. Resoluçom.

Lógica proposicional

A *lógica proposicional* é o estudo das relaçons (lógicas) entre objectos chamados *proposiçons*. Este estudo fai-se com umha dobre finalidade: formalizar os argumentos enunciados na linguagem natural (i.e. galego, espanhol, inglês...) e mais avaliar a validez dos mesmos.

•Def. Proposiçom *é umha afirmaçom, verdadeira ou falsa mas nom ambas à vez*.

E.g. proposiçons:
“2+2=4”
“Julio César foi presidente dos Estados Unidos”
“2x é primo para todo x quadrado perfeito”
“x-y=y-x $\forall$ x, y $\in$ Z”
nom proposiçons:
“que hora é?” 1
“por quê é importante a induçom?” 2
“ide ao cárcere agora mesmo” 3
“x-y=y-x” 4
“ia frio em Roma em janeiro de 1924” 5

1 nom afirma, pergunta
2 nom afirma, pergunta
3 nom afirma, ordena
4 nom sabemos que valem x e y para afirmar ou negar
5 susceptível de discrepância

Usualmente empregamos letras minúsculas para expressarmos as proposiçons (p,q,r,...), que constituem o “alfabeto”. As proposiçons combínam-se para formarem proposiçons compostas mediante umha serie de símbolos chamados conectores lógicos.

•Conectores lógicos:

$\neg$ “nom”, negaçom
$\wedge$ “e” (and), conjunçom lógica
$\vee$ “or” (or), disjunçom lógica
$\Rightarrow$ “implica”, implicaçom lógica
$\Leftrightarrow$ “se e só se”, equivalência lógica

•Regras para a construcçom de proposiçons:

[1] As variáveis proposicionais p, q, e r som expressons bem formuladas.
[2] Se f é umha expressom bem formulada, entom $\neg$f tamém o é.
[3] Se f, g som expressons bem formuladas entom tamém o som f$\wedge$g, f$\vee$g, f$\Rightarrow$g, e f$\Leftrightarrow$g.
[4] Nom hai mais regras.

Para demostrar a falsidade dumha proposiçom abonda com atopar um contraexemplo.

Como estudar o valor de certeza das proposiçons: A suposiçom do cálculo proposicional consiste em que os valores de verdade dumha proposiçom composta construida a partir de outras proposiçons empregando conectores lógicos, queda determinado polos valores de verdade das proposiçons originais e polos conectores utilizados.

Construe-se umha tábua onde por cada possível valor de p, q, r, ... calculamos o valor da proposiçom composta construida. Nesta ***"tábua de verdade"***, cada fila é umha *"interpretaçom"*.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

E.g. Avaliar mediante umha tábua a expressom $(p\wedge q)\vee\neg(p\Rightarrow q)$

p	q	$p\wedge q$	$p\Rightarrow q$	$\neg(p\Rightarrow q)$	$(p\wedge q)\vee\neg(p\Rightarrow q)$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

1ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª

[a derradeira fila indica em quê ordem se recheiam as colunas]

um jeito alternativo de fazer o mesmo é

p	q	$p\wedge q$	$\vee$	$\neg$	$p\Rightarrow q$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

1ª	1ª	2ª	4ª	3ª	2ª

[a derradeira fila indica em quê ordem se recheiam as colunas]

•Def. Tautologia: umha proposiçom é tautologia se os valores de verdade som sempre certos (1, true) para qualquer valor das proposiçons elementais.

E.g. a proposiçom

$$p\vee(\neg p\vee q)$$

é umha tautologia.

•Def. Contradiçom: umha proposiçom é contradiçom se os valores de verdade som sempre falsos (0, false) para qualquer valor das proposiçons elementais.

E.g. a proposiçom

$$p\wedge(\neg p\wedge q)$$

é umha contradiçom.

•Def. Equivalência lógica: duas proposiçons compostas p e q dim-se logicamente equivalentes se tenhem os mesmos valores de verdade para cada possível combinaçom dos valores de verdade das variáveis elementais. Isto denóta-se como segue:

$p\equiv q$

se e só se

$p\Leftrightarrow q$ é umha tautologia (é sempre certo independentemente do que valham p e q)

•Def. Implicaçom lógica: umha proposiçom p implica logicamente a outra proposiçom q (i.e. de p dedúce-se q) se nunca se dá que p seja certo e q falso. Isto denóta-se como segue:

p q

se e só se

$p\Rightarrow q$ é umha tautologia (é sempre certo independentemente do que valham p e q)

- Leis proposicionais*:

①	$\neg(\neg p) \equiv p$	dobre negaçom
②	$(p\vee q) \equiv (q\vee p)$	
	$(p\wedge q) \equiv (q\wedge p)$	comutatividade
③	$p\wedge(q\wedge r) \equiv (p\wedge q)\wedge r$	
	$p\vee(q\vee r) \equiv (p\vee q)\vee r$	associatividade
④	$p\wedge(q\vee r) \equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	
	$p\vee(q\wedge r) \equiv (p\vee q)\wedge(p\vee r)$	distributividade
⑤	$p\wedge p \equiv p$	
	$p\vee p \equiv p$	idempotência
⑥	$p\wedge T \equiv p$	
	$p\vee C \equiv p$	identidade
⑦	$p\wedge\neg p \equiv C$	
	$p\vee\neg p \equiv T$	inversibilidade
⑧	$p\wedge C \equiv C$	
	$p\vee T \equiv T$	dominaçom
⑨	$p\vee(p\wedge q) \equiv p$	
	$p\wedge(p\vee q) \equiv p$	absorçom

* C é Contradiçom; T é Tautologia

Mais leis proposicionais:

- Leis de DeMorgan:

  $\neg(p\wedge q) \equiv \neg p\vee\neg q$
  $\neg(p\vee q) \equiv \neg p\wedge\neg q$
  $p\wedge q \equiv \neg(\neg p\vee\neg q)$
  $p\vee q \equiv \neg(\neg p\wedge\neg q)$

- Leis de implicaçom:

  $p\Rightarrow q \equiv \neg p\vee q \equiv \neg(p\wedge\neg q)$
  $\neg p\Rightarrow q \equiv p\vee q$
  $\neg(p\Rightarrow\neg q) \equiv p\wedge q$

- Lei da contraposiçom:

  $p\Rightarrow q \equiv \neg q\Rightarrow\neg p$

- Lei de reduçom ao absurdo:

  $p\Rightarrow q \equiv (p\wedge\neg q)\Rightarrow C$

- Lei de equivalência:

  $p\Leftrightarrow q \equiv (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

- Modus ponens:[1]

  $[p\wedge(p\Rightarrow q)] \quad q$

- Modus tollens:[2]

  $[(p\Rightarrow q)\wedge\neg q] \quad \neg p$

- Dilemas construtivos:

  $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \quad [(p\wedge r)\Rightarrow(q\wedge s)]$
  $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)] \quad [(p\vee r)\Rightarrow(q\vee s)]$ [3]

[1]demostraçom: $p\wedge(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q) \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow C\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow \underline{p\wedge q \quad p} \Leftrightarrow \underline{p\wedge(p\Rightarrow q) \quad p}$ *c.q.d.*

[2]demostraçom: $(p\Rightarrow q)\wedge\neg q \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge\neg q \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q) \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee C \Leftrightarrow \underline{\neg p\wedge\neg q \quad \neg p} \Leftrightarrow \underline{[(p\Rightarrow q)\wedge\neg q] \quad \neg p}$ *c.q.d.*

[3]demostraçom de $[(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)]$ $[(p\vee r)\Rightarrow(q\vee s)]$ mediante umha tábua de verdade:

1	1	1	1	2	3	2	4	2	3	2
p	q	r	s	$p\Rightarrow q$	$\wedge$	$r\Rightarrow s$	$\Rightarrow$	$p\vee r$	$\Rightarrow$	$q\vee s$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

A coluna 4 é toda “1”s, assi que se demostrou a implicaçom lógica.

Exercício: Avaliar a seguinte expressom $[(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow s)]$ $[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$ mediante umha tábua de verdade.

1	1	1	1	2	3	2	4	2	3	2
p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$\vee$	$r \Rightarrow s$	$\Rightarrow$	$p \vee r$	$\Rightarrow$	$q \vee s$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1		1	1	1
0	0	0	0	1	1	1		0	1	0
0	0	0	1	1	1	1		0	1	1
0	0	1	0	1	1	0		1	0	0
0	0	1	1	1	1	1		1	1	1
0	1	0	0	1	1	1		0	1	1
0	1	0	1	1	1	1		0	1	1
0	1	1	0	1	1	0		1	1	1
0	1	1	1	1	1	1		1	1	1
0	1	0	0	1	1	1		0	1	1
0	1	0	1	1	1	1		0	1	1
0	1	1	0	1	1	0		1	1	1
0	1	1	1	1	1	1		1	1	1
1	0	0	0	0	1	1		1	0	0
1	0	0	1	0	1	1		1	1	1
1	0	1	0	0	0	0		1	0	0
1	0	1	1	0	1	1		1	1	1
1	0	0	0	0	1	1		1	0	0
1	0	0	1	0	1	1		1	1	1
1	0	1	0	0	0	0		1	0	0
1	0	1	1	0	1	1		1	1	1
1	1	0	0	1	1	1		1	1	1
1	1	0	1	1	1	1		1	1	1
1	1	1	0	1	1	0		1	1	1
1	1	1	1	1	1	1		1	1	1
1	1	0	0	1	1	1		1	1	1
1	1	0	1	1	1	1		1	1	1
1	1	1	0	1	1	1		1	1	1
1	1	1	1	1	1	1		1	1	1

Aparece um zero na coluna 4: já se demostrou que nom hai implicaçom lógica.

- Regras de substituçom:

é preciso emprega-las com cautela

❶ Se umha proposiçom composta p é umha tautologia e sempre que aparece em p umha variável q (subproposiçom de p) a substituimos por umha proposiçom ε (sempre a mesma), daquela obtemos outra proposiçom p* que tamém é umha tautologia.

❷ Se umha proposiçom composta p tem umha subproposiçom q, a qual a substituimos por outra equivalente q*, o resultado é umha proposiçom composta p* equivalente a p.